مثال: يوجد في أحد المصارف ثلاثة أُمناء (قنوات خدمة) للصندوق حيث يصل الزبائن بمعدل (36) زبون في الساعة تبعاً لتوزيع بواسون وأن خدمة الزبون الواحد الواصل تستغرق (4) دقائق تبعاً للتوزيع الأُسي جد ما يلي:

1- احتمال عدم وجود أي زبون في المصرف.

2- احتمال وجود زبون واحد أو اثنان أو ثلاثة أو أربعة زبائن في المصرف.

3- عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار.

4- عدد الزبائن المتوقع في المصرف.

5- وقت الانتظار المتوقع في الصف والمصرف.

$(M/M/C):(GD/\infty/\infty)$

$C = 3$, $\lambda = 36$ زبون/ساعة

$$M = \frac{1}{4} * 60 = 15 \quad \text{زبون/ساعة}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{M} \Rightarrow \frac{36}{15} = 2.4$$

$$\frac{\rho}{C} < 1 \Rightarrow \frac{2.4}{3} = 0.8 < 1$$

$$1) \quad P_\circ = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^C}{C!} * \frac{CM}{CM-\lambda}\right)\right]^{-1}$$

$$P_\circ = \left[\frac{(2.4)^0}{0!} + \frac{(2.4)^1}{1!} + \frac{(2.4)^2}{2!} + \left(\frac{(2.4)^3}{3!} * \frac{3(15)}{3(15)-36}\right)\right]^{-1}$$

$$P_\circ = [1 + 2.4 + 2.88 + (2.304 * 5)]^{-1}$$

$$= \mathbf{0.056}$$

$$2) \quad P_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!}\right) P_\circ & , 0 \le n < C \; , C = 3 \\ \left(\frac{\rho^n}{C!\, C^{n-C}}\right) P_\circ & , n \ge C \end{cases}$$

$$n^1 < C^3 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{(2.4)^1}{1!} * 0.056 = 0.135$$

$$n^2 < C^3 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{(2.4)^2}{2!} * 0.056 = 0.162$$

$$n^3 = C^3 \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{(2.4)^3}{3!\,(3)^{3-3}} * 0.056 = 0.129$$

$$n^4 > C^3 \quad \Rightarrow \quad P_4 = \frac{(2.4)^4}{4!\,(3)^{4-3}} * 0.056 = 0.107$$

$$3) \quad \boldsymbol{Lq} = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!\,(C-\rho)^2} P_\circ \Rightarrow \frac{(2.4)^4}{2!\,(3-2.4)^2}(0.056) = 2.58 \simeq \mathbf{3} \quad \text{زبون}$$

4) $\boldsymbol{Ls} = Lq + \rho \Longrightarrow 2.58 + 2.4 = 4.98 \simeq \mathbf{5}$ زبون

5) $\boldsymbol{Wq} = \frac{Lq}{\lambda} \Longrightarrow \frac{2.58}{36} = \mathbf{0.071}$ ساعة

$\boldsymbol{Ws} = \frac{Ls}{\lambda} \Longrightarrow \frac{4.89}{36} = \mathbf{0.136}$ ساعة

<u>مثال آخر على هذا النموذج</u>: في احدى الدوائر الحكومية يوجد موظفان يُقدمان نفس الخدمة وتتطلب خدمة الزبون الواحد (5) دقائق ويتبع التوزيع الأُســي ويصل الزبائن بمعدل (18) زبون في الساعة تبعاً لتوزيع بواســون جد ما يلي:

1- احتمال أن الزبون ستقدُم له الخدمة مباشرةً.

2- عدد الزبائن المتوقع في الدائرة وفي صف الانتظار.

3- وقت الانتظار المتوقع في الدائرة وفي صف الانتظار.

4- احتمال وجود على الأكـــثر ثلاثة زبائن في النظام.

5- احتمال وجود على الأقــل ثلاثة زبائن.

$C = 2 \ , \ M = \frac{1}{5} * 60 = 12$ زبون/ساعة , $\lambda = 18$

$\rho = \frac{\lambda}{M} \Longrightarrow \frac{18}{15} = 1.5$

$\frac{\rho}{C} < 1 \Longrightarrow \frac{1.5}{2} = 0.75 < 1$

1) $\boldsymbol{P_\circ} = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^C}{C!} * \frac{CM}{CM-\lambda}\right)\right]^{-1}$

$= \left[\frac{(1.5)^0}{0!} + \frac{(1.5)^1}{1!} + \left(\frac{(1.5)^2}{2!} * \frac{2(12)}{2(12)-18}\right)\right]^{-1} = [1 + 1.5 + (1.125 * 4)]^{-1} = [\mathbf{7}]^{-\mathbf{1}}$

$= \mathbf{0.143}$

2) $\boldsymbol{Lq} = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!\,(C-\rho)^2} P_\circ \Longrightarrow \frac{(1.5)^3}{1!\,(2-1.5)^2}(0.143) = \mathbf{1.932} \simeq 2$ زبون

$\boldsymbol{Ls} = Lq + \rho \Longrightarrow 1.932 + 1.5 = \mathbf{3.432} \simeq \mathbf{3}$ زبون

3) $\boldsymbol{Ws} = \frac{Ls}{\lambda} \Longrightarrow \frac{3.432}{18} = \mathbf{0.191}$ ساعة

$\boldsymbol{Wq} = \frac{Lq}{\lambda} \Longrightarrow \frac{1.932}{18} = \mathbf{0.107}$ ساعة

4) $\boldsymbol{P(X \le 3) = P_\circ + P_1 + P_2 + P_3}$

$P_\circ = 0.143$

$\boldsymbol{P_1} = \frac{\rho^n}{n!} = \frac{(1.5)^1}{1!} 0.143 = \mathbf{0.215}$