## .Sensitivity analysis: تحليل الحساسية

In most practical problems, we are interested not only in optimal solution of the LP problem, but also in how the solution changes when the parameters of the problem change. The study of the effect of parameter changes on the optimal solution is called sensitivity analysis.

في معظم المسائل العملية ، لا نهتم فقط بالحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية ، ولكن أيضًا نهتم بكيفية تغيير الحل عندما تتغير معلمات المسألة. ان دراسة تأثير تغييرات المعلمات على الحل الأمثل يسمى بـ(تحليل الحساسية).

The changes in the parameters of a LP problem include:

1. Changes in the right-hand-side constants $b_i$
2. Changes in the cost coefficients of decision variables $c_j$
3. Changes in the coefficients of the constraints $a_{ij}$
4. Addition of new variables
5. Addition of new constraints

ان التغييرات في معلمات مسألة البرمجة الخطية تشمل ما يلي:

1. التغييرات في ثوابت الطرف الأيمن $b_i$
2. التغيرات في معاملات التكلفة لمتغيرات القرار $c_j$
3. التغييرات في معاملات القيود $a_{ij}$
4. إضافة متغيرات جديدة
5. إضافة قيود جديدة

In general, when a parameter is changed, it results in one of three cases:

1. The optimal solution remains unchanged; that is, the basic variables and their values remain unchanged.
2. The basic variables remain the same but their values are changed.
3. The basic variables as well as their values are changed.

بشكل عام ، عندما يتم تغيير المعلمة ، ينتج عنها واحدة من الثلاث حالات التالية:

1. الحل الأمثل يبقى دون تغيير. أي أن المتغيرات الأساسية وقيمها تبقى دون تغيير.

2. تبقى المتغيرات الأساسية كما هي ولكن تتغير قيمها.

3. يتم تغيير المتغيرات الأساسية وقيمها.

**1. Changes in the right-hand-side constants $b_i$**

is change the $b_i$ to $b_i + \Delta b_i$ so that the new problem differs from the original only on the right-hand side. Our interest is to investigate the effect of changing $b_i$ to $b_i + \Delta b_i$ on the original optimum.

هو تغيير bi إلى $b_i + \Delta b_i$ بحيث تختلف المشكلة الجديدة عن المشكلة الأصلية فقط في قيم الطرف الأيمن. اذ ينصب اهتمامنا على دراسة تأثير تغيير bi إلى $b_i + \Delta b_i$ على الحل الامثل الاصلي.

**Example (1):**

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

$S.T.$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

1.Discuss the effect of changing the requirement vector from $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ $to$ $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ on the optimal solution.

ناقش تأثير تغيير متجه المتطلبات من $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ على الحل الامثل.

2. Discuss the effect of changing the requirement vector from $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ $to$ $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$ on the optimal solution.

ناقش تأثير تغيير متجه المتطلبات من $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$ على الحل الامثل.

Where the optimal table for this problem is:

حيث ان جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

| B.V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $R_1$ | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{8}{5}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{9}{5}$ |
| $Z\text{-}C_j$ | 0 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{29}{5}$ | $\frac{-2}{5}+M$ | $\frac{141}{5}$ |

Solution:

1. $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Since both $x_1$ and $x_2$ are non-negative, the current basic solution remains optimal but at the new values $x_1 = \frac{11}{5}$ , $x_2 = \frac{12}{5}$ $and\ x_3 = 0,\ Z = \frac{199}{5}$

او يمكن إيجاد دالة الهدف بالطريقة التالية:

$$Z = C_B\ X_B = (12\quad 5)\begin{pmatrix} \frac{12}{4} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \frac{199}{5}$$

بما ان كلا $x_1$ و $x_2$ غير سالبين، لذا فان الحل الاساسي الحالي يبقى هو الحل الامثل ولكن عند القيم الجديدة التالية للمتغيرات ودالة الهدف $x_1 = \frac{11}{5}$ , $x_2 = \frac{12}{5}$ $and\ x_3 = 0,\ Z = \frac{199}{5}$

2. $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{21}{5} \end{bmatrix} \leq 0$$

Since $x_2$ becomes negative , the current optimal solution becomes infeasible, so we use dual simplex method to find the optimal solution

بما ان $x_2$ اصبح سالباً ، فان الحل الأمثل الحالي اصبح غير ممكن ، لذلك نستخدم طريقة السمبلكس المقابلة لايجاد الحل الأمثل

| B.V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $R_1$ | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{-3}{5}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{21}{5}$ |
| $Z\text{-}C_j$ | 0 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{29}{5}$ | $\frac{-2}{5}+M$ | $\frac{69}{5}$ |

$x_2 = \frac{-3}{5}$ is the leaving variable

$x_2$ متغير خارج

$(x_3)$ is the entering variable and $\left(\frac{-1}{5}\right)$ is the pivot element.

$x_3$ متغير داخل و $\left(\frac{-1}{5}\right)$ هو العنصر المحوري

| B.V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $R_1$ | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | -5 | 1 | $-2$ | 1 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 7 | 0 | 3 | $-1$ | 0 |
| $Z\text{-}C_j$ | 0 | 3 | 0 | 7 | $-1+M$ | 12 |

The optimal solution is: $x_1 = 0\,, x_2 = 0\ \ and\ x_3 = 3,\ Z = 12$

**Example (2):**

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 20x_1 + 25x_2$

$S.T.$

$2x_1 + 3x_2 \leq 40$

$x_1 + 2x_2 \leq 20$

$3x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$