لايزال الحل غير أمثل لوجود قيم موجبة في دالة الهدف في الجدول المبسط (8) هو المقدار (3) الواقع في عمود المتغير (s_1) لذلك فإن المتغير الداخل سيكون (s_1) وأن المتغير الخارج هو (s_2) أي أن (s_1) سيكون بدل (s_2)كما مبين في الجدول المبسط (9)

الجدول المبسط(9)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	الثابت
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	1
x_2	0	1	$\frac{-9}{8}$	0	$\frac{-3}{16}$	$\frac{3}{2}$
s_1	0	0	$\frac{-30}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	3
$Z-Cj$	0	0	$\frac{-31}{4}$	0	$\frac{-9}{8}$	15

جميع القيم في دالة الهدف سالبة أو مساوية للعنصر في الجدول (9) أعلاه فإن الحل أعلاه هو الحل الأمثل وأن قيمة (Z) المثلى:

$$Z = 15 \quad , \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

مثال: (2)

$maximise\ Z = 3x_1 + x_2 - x_3$

$S.To$

$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 10$

$2x_1 - x_2 \qquad \geq 2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0$

بعد إضافة المتغيرات المكملة والإصطناعية, تكون القيود أعلاه كما ياتي:

$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 10$

$2x_1 - x_2 - s_1 + R_2 = 2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + s_2 = 6$

$x_1 , x_2 , x_3 , R_1 , R_2 , s_1 , s_2 \geq 0$

في حالة التعظيم ($maximise$) نطرح (M) مضروبة بـــ (R_1) و (M) مضروبة بـــ (R_2) من دالة الهدف أي أن:

$maximise\ Z = 3x_1 + x_2 - x_3 - MR_1 - MR_2$

من أجل جعل معاملات (R_1, R_2) في دالة الهدف تساوي صفراً نضيف إليها:

$$R_1 \text{ معادلة } * M$$

$$R_2 \text{ معادلة } * M$$

$$Z - 3x_1 - x_2 + x_3 + \cancel{MR_1} + \cancel{MR_2} = 0$$
$$-Mx_1 - \cancel{Mx_2} - Mx_3 - MR_1 \qquad = -10$$
$$-2Mx_1 + \cancel{Mx_2} + Ms_1 \qquad - MR_2 = -2M$$
$$Z - (3 + 3M)x_1 - x_2 + (1 - M)x_3 + Ms_1 = -12M$$

تكتب دالة الهدف والقيود كما في الجدول المبسط (10) الأتي:

الجدول المبسط: (10)

المتغيرات الأساسية	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
$-MR_1$	1	1	1	0	0	1	0	10
$\leftarrow -MR_2$	2	-1	0	-1	0	0	1	2
$0s_2$	1	-2	1	0	1	0	0	6
Z-Cj	$-3-3M$	-1	$-M+1$	M	0	0	0	$-12M$

في حالة التعظيم نختار المتغير الداخل ذو المعامل الأكثر سالبية في دالة الهدف أكثر مقدار في دالة الهدف هو ($-3 - 3M$) أي أن (x_1) سيكون المتغير الداخل و (R_2) هو النتغير الخارج لأن أقل نسبة تقع في الصف (R_2). نطبق خطوات الحل بطريقة السمبلكس على الجدول المبسط (10) وبذلك نحصل على الجدول المبسط (11):

المتغيرات الأساسية	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
$\leftarrow -MR_1$	0	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	9
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$0s_2$	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
Z-Cj	0	$-\frac{3}{2}M - \frac{5}{2}$	$1-M$	$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}M$	0	0	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}M$	$3-9M$

الحل غير أمثل لذلك نختار المعامل الأكثر سالبية في دالة الهدف في الجدول اعلاه ونلاحظ أن المقدار $\left(-\frac{3}{2}M - \frac{5}{2}\right)$ معامل (x_2) هو الاكثر سالبية

إذاً (x_2) يكون المتغير الداخل وان (R_1) سيكون المتغير الخارج بعد تطبيق خطوات الطريقة المبسطة نحصل على الجدول أدناه

الجدول المبسط (12)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	$\downarrow s_1$	s_2	R_1	R_2	الثابت
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$\leftarrow 0s_2$	0	0	2	**(1)**	1	1	-1	14
$Z-Cj$	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$M+\frac{5}{3}$	$M+\frac{2}{3}$	18

(R_1, R_2) في الجدول المبسط (12) متغيرات غير أساسية ولذلك يُحذفان من أي إعتبارات أخرى.

الحل لايزال غير امثل كما نلاحظ ذلك في الجدول المبسط (12) حيث المعامل الأكثر سالبية هو المقدار $\left(-\frac{2}{3}\right)$ وهو معالمل (s_1) لذلك فإن (s_1) المتغير الداخل وان (s_2) سيكون المتغير الخارج وبعد تطبيق خطوات الطريقة المبسطة ينتج الجدول المبسط (13) أدناه.

الجدول المبسط (13)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	الثابت
x_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{26}{3}$
s_1	0	0	2	1	1	14
$Z-Cj$	0	0	4	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{82}{3}$

الحل الأن أمثل لأن جميع قيم صف دالة الهدف (Z) موجبة حيث:

$$Z = \frac{82}{3}$$

$$x_1 = \frac{26}{3}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

5-2 حل نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة تقليل دالة الهدف (Z):

Solution of (L.P) Model with Minimization Objective Function .

إن حل نموذج البرمجة الخطية (LP) بموجب الطريقة المبسطة (Simplex Method)، في حالة تقليل (Min) دالة الهدف (Z)، أي عندما تكون جميع علامات القيود بصيغة أكبر من أو تساوي (≥)، أو تكون علامات القيود بصيغة [المساواة (=)، أو أكبر من أو تساوي (≥)] في حالات خاصة جداً، يتم بواسطة أحد الأسلوبيين الآتيين:

1. طريقة (M) الكبيرة (Big-M) method.
2. طريقة المرحلتين (Two- phase) method.

1-5-2 طريقة (آم) الكبرى The (Big-M) method:

تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات اصطناعية (Artificial Variables) إلى جانب المتغيرات الراكدة (Slack Variables) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة التقليل (Minimization). عندما تكون علامات القيود مكتوبة بصيغة [المساواة (=). أو أكبر من أو تساوي (≥)]. وإلى دالة الهدف

(Z)، على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف (Z) بمعاملات كبيرة جداً تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف (Z) في حالة التقليل (Minimization) وإشارة سالبة في حالة التعظيم (Minimization).

خطوات الحل بموجب طريقة (M) الكبيرة:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، بعد إضافة المتغيرات الراكدة (S_i) إلى قيود النموذج ودالة الهدف. بعد ذلك يتطلب إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) إلى القيود ودالة الهدف أيضاً.
2. صياغة دالة الهدف جديدة (Z)، بدلالة المتغيرات (X_j)و (S_i)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة (M) فقط.
3. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، اعتماداً على جميع معاملات المتغيرات (R_i ,S_i , X_j) الموجودة في قيود النموذج ودالة الهدف (Z).
4. تحديد المتغير الداخل، على أساس اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف (Z).
5. اعتماد بقية الخطوات السابقة والواردة في حالة التعظيم (Minimization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات (C_j) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أقل أو تساوي الصفر ، أي إن ($C_j < 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل.

مثال (12):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة (µ) الكبيرة:

Example (12): Find the optimal solution for (L.P)Model using (Big.M)Method?.

$$\text{Min.}\quad Z = 2X_1+X_2$$

S. t. :

$$X_1+3X_2 \geq 30$$
$$4X_1+2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

أ. 1. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$\text{Min.}\quad Z = 2X_1+X_2 + 0S_1 - 0S_2$$

S. t. :

$$X_1+3X_2 - S_1 \quad = 30$$
$$4X_1+2X_2 \quad - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم (S_1) و (S_2) ظهرت سالبة وهي ($S_2= -40$, $S_1 = -30$)، مما يتقاطع ذلك مع عدم السلبية (S_1 , $S_2 \geq 0$)، ولمعالجة هذا الموضوع يتم ذلك بإضافة لمتغيرات الاصطناعية للقيود ودالة الهدف (Z).

3. إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) لقيود النموذج ودالة الهدف (Z)، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1+X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

S. t. :

$$X_1+3X_2 - S_1 \quad + R_1 \quad = 30 \text{ .... } (1)$$
$$4X_1+2X_2 \quad - S_2 \quad + R_2= 40 \text{ .... } (2)$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

M: Is Very Big

أ. صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات (X_j) و (S_i) فقط، وكالآتي:

من المعادلتين (1) و (2) نحصل على كل من (R_1) و (R_2)، إذن إن:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 - S_2 \end{aligned}\right\} \text{ ....(3)}$$

نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة بالعلاقة (3) في دالة الهدف (Z)، ينتج:

$$Z= 2 X_1 + X_2 + M (30- X_1 - 3X_2 - S_1) + M (40 - 4X_1- 2X_2 + S_2)$$
$$Z = 2X_1 + X_2 + 30M - MX_1 - 3MX_2 - S_1 + 40M - 4MX_1 - 2MX_2 + MS_2$$
$$Z = (2- 5M) X_1 + (1-5M) X_2 + MS - MS_2 + 70M$$
$$Z - (2- 5M) X_1 + (1-5M) X_2 + MS - MS_2 = 70M$$

ج. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، وكالآتي:

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
Z	-2 + 5M	-1 + 5M	-M	-M	0	0	70 M	-
R_1	1	(3)	-1	0	1	0	30	10
R_2	4	2	0	-1	0	0	40	20

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

د. المتغير الداخل هو (X_2)، لكونه يقابل اكبر قيمة موجبة (-1+ 5M)، في صف دالة الهدف (Z)، بد افتراض قيمة (M= 100).

هـ. المتغير الخارج هو (R_1)، لكونه يقابل اصغر قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).

و. العنصر المحوري هو (3).

ز. عليه تكون المعادلة المحورية (Pivot Equation)، كالآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{1}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{3},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{0}{3},\frac{30}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10\right]$$

ح. نقوم بإيجاد قيمة (Z) و (R_2) الجديتين، على النحو الآتي:

$$\text{New } (Z) = (-2 + 5M,\ -1 + 5M,\ -M.0.0.70\ M) - (-1+5M) * \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10)\right]$$

$$= \left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,0,\frac{-1}{3}\frac{2}{3}M,-M,\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,0,10-20M\right]$$

$$\text{New } (R_2) = [4,\ 2,0,-1,0,1,40] - 2 * \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10)\right]$$

$$= \left[\frac{10}{3},0,\frac{2}{3},-1,\frac{-2}{3},1,20)\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
Z	$\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M$	0	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M$	-M	$\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	0	10+ 20M	-
X_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10	30
R_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	1	20	6

الصف المحوري
العمود المحوري
العنصر المحوري

أ. المتغير الداخل هو (X_1)، لكونه يقابل أكبر قيمة موجبة $\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right]$. في صف دالة الهدف (Z).

ب. المتغير الخارج هو (R_2)، لكونه يقابل أقل قيمة موجبة (6) في عمود النسبة (Ratio).

ج. العنصر المحوري هو $\left[\frac{10}{3}\right]$.

د. عليه تكون المعادلة المحورية، على النحو الآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{10/3}{10/3}, \frac{0}{10/3}, \frac{2/3}{10/3}, \frac{-1}{10/3}, \frac{-2/3}{10/3}, \frac{1}{10/3}, \frac{20}{10/3}\right]$$

$$= \left[1, 0, \frac{1}{5}, \frac{-3}{10}, \frac{-1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right]$$

هـ. نقوم بإيجاد قيمة (Z) و (X_2) الجديدتين، كالآتي: