3- Multiplying complex number ضرب الاعداد المركبة

$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ $\qquad (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1$

$(a+bi) \cdot (c+di)$

$a(c+di) + bi(c+di)$

$ac + adi + cbi - bd$

$\underbrace{(ac-bd)}_{\text{حقيقي}} + \underbrace{(ad+cb)}_{\text{خيالي}} i$

Ex: $(2+8i) \cdot (3+7i)$

$= 6 + 14i + 24i - 56$

$= -50 + 38i$

Ex: $(-2-i) \cdot (-4+2i)$

$= 8 + 4i + 4i - 2$

$= 6 + 8i$

Ex: $(6-3i)(2i) = (12i - 6i^2)$

- Accompanying number العدد المرافق مهم جداً

if $Z = a+bi \longrightarrow \bar{Z} = a-bi$

خواص الاعداد المرافقة

① $Z + \bar{Z} = (a+bi) + (a-bi)$

$= 2a$ عدد حقيقي

② $Z - \bar{Z} = (a+bi) - (a-bi)$

$2bi$ عدد خيالي

3) $Z \cdot \bar{Z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2$

عدد حقيقي

دائماً العدد في مرافقة هو الاول تربيع + الثاني تربيع

4 قسمة الاعداد المركبة

$$\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}}$$

Ex: $\frac{2i}{1+3i}$

Sol: $\frac{2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2i}{1+9} + \frac{6}{1+9} = \frac{6+2i}{10}$

انواع خاصة من المصفوفات

1- Bar matrix المصفوفة المرافقة

ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$ تحتوي على مرافقات الاعداد المركبة

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 5 \\ 1+3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} -2i & 5 \\ 1-3i & 0 \end{bmatrix}$$

2- Hermit matrix مصفوفة هيرمت

تحقق الشروط الثلاثة :

a- ~~Suqra~~ square matrix مصفوفة مربعة

b- diagonal elements are real عناصر القطر اعداد حقيقية

c- $A = (\overline{A})^T$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3i \\ 3i & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & 3i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}$$

The matrix is **hermit**

تحقق الشروط الثلاثة

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3i & 5i \\ 1-i & 2 & 4i \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3i & -5i \\ 1+i & 2 & -4i \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 6 \\ 3i & 2 & 7 \\ -5i & -4i & 8 \end{bmatrix}$

نلاحظ انها مربعة عناصر القطر ارقام فقط لكن
لا تحقق الشرط $A = (\bar{A})^T$

∴ The matrix is not hermit.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2+i \\ -2-i & 6 \end{bmatrix}$

$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2-i \\ -2+i & 6 \end{bmatrix} \rightarrow (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -2+i \\ -2-i & 6 \end{bmatrix}$

∴ The matrix is hermit

3- Hermit offset matrix

a- squar مربعة

b- the diagonal elements are zeros or complex numbers
عناصر القطر اما اصفار او اعداد مركبة

c- $A = -(\bar{A})^T$

Ex: $A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ 3X3

$\bar{A} = \begin{bmatrix} -i & 1+i & 2 \\ -1+i & -3i & -i \\ -2 & -i & 0 \end{bmatrix}, (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -i & -1+i & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$

$= - \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$

مربعة عناصر القطر (اصفار او
اعداد مركبة) وتحقق الشرط
تالفية $A = -(\bar{A})^T$

∴ The matrix is hermit offes

خواص المصفوفة المرافقة

1- $\bar{\bar{A}} = A$

2- $\overline{(K \cdot A)} = \bar{K} \cdot \bar{A}$

3- $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$

4- $\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

5- $A = \bar{A}$ اذا كانت A هي مصفوفة حقيقية

$\bar{A} = -A$ اذا كانت عناصر A كلها اصفار او اعداد خيالية

وبصورة عامة $A \cdot \bar{A}$ هي مصفوفة مركبة ولا تكون حقيقية

Ex:- find $A \cdot \bar{A}$

$$A = \begin{bmatrix} 5+i & -3i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 5-i & 3i \\ -1 & 2-i \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot \bar{A} = \begin{bmatrix} 5+i & -3i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5-i & 3i \\ -1 & 2-i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25+1+3i & (15i-3)+6i-3 \\ (-5+i)+2+i & -3i+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26+3i & 9i-6 \\ -7 & 5-3i \end{bmatrix}$$

مصفوفة غير حقيقية

خواص ضرب المصفوفات

١- حاصل ضرب مصفوفتين مثلية عليا مع مثلية عليا هو مصفوفة مثلية عليا

٢- اذا كانت كل من A و B مصفوفتان مثلثية سفلى فان حاصل ضربهما هو مصفوفة مثلية سفلى

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلية عليا   مثلية عليا

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مثلثية عليا

٣- حاصل ضرب مصفوفة قطرية مع مصفوفة قطرية هو عبارة عن ضرب عناصر القطر والعناصر المتناظرة في القطر الرئيسي لكل مصفوفة

Ex:

$$A = \text{diag}(3, 4, 6) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \text{diag}(1\ 4\ 8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot B = \text{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, a_{33}b_{33})$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

Ex: Is the matris satisfy the relation $A^2 = I$, where

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

نعط

- اذا كانت $A = A^T$ يقال بان المصفوفة متناظرة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

المحددات

~~determinted~~ determinant

لتكن المصفوفة A هي مصفوفة مربعة $A_{n \times n}$ عندئذٍ يقال ان للمصفوفة محدد وهو عبارة عن عدد حقيقي (موجب، سالب، صفر) ويرمز له بالرمز $\det(A), |A|$

محدد لمصفوفة سعة (1×1)

① Ex: $A = [7]_{1\times1} \longrightarrow \det(A) = |7| = 7$

$B = [-5]_{1\times1} \longrightarrow \det(B) = |-5| = -5$

محدد لمصفوفة سعة 2×2

2) (حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي - حاصل ضرب عناصر القطر المعاكس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = (2\times(-1)) - (3\times4)$$
$$= -2 - 12 = -14$$