الحل :- اولا نشتق الدالة بحيث $f'(x) = (x+1)e^x + 2x$ ومن ثم نوجد قيمة اولية من خلال تقسيم الفترة وذلك

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.5$$

$$f(x_0) = 3.973$$

$$f'(x_0) = 14.204$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.22$$

$$|x_1 - x_0| = |1.22 - 1.5| = 0.28 > \epsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.158$$

$$|x_2 - x_1| = |1.158 - 1.22| = 0.062 > \epsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.155$$

$|x_3 - x_2| = |1.155 - 1.158| = 0.003 \le \epsilon$, x_3 is the root

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد الجذر النوني للعدد $a > 0$

الحل:-

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$$x^n = a$$

$$f(x) = x^n - a$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\therefore\ x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - a}{nx_i^{n-1}}$$

واجب:- بدون استخدام عامل القسمة اقترح صيغة تكرارية لايجاد مقلوب العدد $a > 0$

5-**الصيغة التكرارية للنقطة الصامدة**:- The fixed point iterative method

تعد هذه الطريقة من الطرق الجيدة لايجاد جذور المعادلات الغير خطية وذات متغير واحد. لتكن $f(x)=0$ دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وتحتوي على جذر حقيقي في هذه الفترة

- اعادة ترتيب المعادلة $f(x)=0$ وذلك بابقاء متغير واحد x عند يسار المساواة وتحويل كافة المتغيرات عند يمين المساواة اي بمعنى $x=g(x)$ حيث ان $g(x)$ تعتبر كدالة جديدة لـ x وتختلف عن $f(x)$.
- ناخذ مشتقة $g(x)$ اي $\acute{g}(x)$.
- نقوم بالتعويض بقيمة الجذر الاولي والتي يمكن الحصول عليها من خلال تقسيم الفترة $[a,b]$ اي ايجاد $\acute{g}(x_0)$.
- اختبار مدى دقة الصيغة المقترحة في الوصول للحل وذلك بتطبيق الصيغة $|\acute{g}(x_0)|<1$:
  - فاذا كانت الصيغة اعلاه صحيحة فان الصيغة $g(x)$ توصلنا الى الحل الصحيح (الجذر المطلوب) ونكمل الحل باستخدام الصيغة التكرارية لـ $g(x)$ والتي هي:
    $x_{i+1}=g(x_i)\ ,i=0,1,2,\ldots$
  - اما اذا كانت قيمة $|\acute{g}(x_0)|\geq 1$ فان الصيغة $g(x)$ لا توصلنا الى الحل الصحيح عندئذ نقوم بايجاد صيغة اخرى.
- شرط التوقف: نتوقف عن تكرار عملية ايجاد الحل باستخدام الشرط $|x_{i+1}-x_i|<\epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة النقطة الصامدة جد جذر المعادلة $x^2-x-3=0$ علما ان $x_0=2.5$.

الحل:-

$$x=1+\frac{3}{x}=g_1(x)$$

$$x=x^2-3=g_2(x)$$

$$x=\frac{1}{8}(9x-x^2+3)=g_3(x)$$

$$x=\frac{x^2+3}{2x-1}=g_4(x)$$

n	$x_{n+1}=g_1(x_n)$	$x_{n+1}=g_2(x_n)$	$x_{n+1}=g_3(x_n)$	$x_{n+1}=g_4(x_n)$
0	2.5	2.5	2.5	2.5
1				
2				
3				
4				
5	2.30892	$7.41*10^{13}$	2.30770	2.302772

ان الصيغة g_1 , g_3 , g_4 تعطي قيم متقاربة بينما اعطت الصيغة g_2 قيم متباعدة عن الجذرلماذا؟

مثال:- باستخدام طريقة النقطة الصامدة جد جذر المعادلة $4x^2 - 2x - 1 = 0$ في الفترة $[0,1]$, $\epsilon = 0.005$

الحل:-

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 0.5$$

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 - 2x \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-2x}$$

$$g_1'(x_0) = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$g_1'(x) = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-1}} \Rightarrow$ الصيغة لاتوصلنا للحل

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 - 4x^2 \Rightarrow x = \frac{1-4x^2}{2}$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2} - 2x^2$$

$$g_2'(x) = -4x \Rightarrow g_2'(x_0) = -2$$

$$\Rightarrow |g_2'(x_0)| = 2 > 1$$

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x(4x+2) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4x+2}$$

$$g_3(x) = \frac{1}{4x+2}$$

$$g_3'(x) = \frac{4}{(4x+2)^2} \Rightarrow g_2'(x_0) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |g_2'(x_0)| = \frac{1}{4} < 1$$

باستخدام الصيغة التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ فان $x_{i+1} = \frac{1}{(4x_i+2)}$ وعليه فان

$$x_1 = \frac{1}{(4x_0+2)} = \frac{1}{(4*0.5+2)} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{(4x_1+2)} = \frac{1}{(4*0.25+2)} = \frac{1}{3}$$

$$|x_2 - x_1| = 0.08 > \epsilon$$

$$x_3 = 0.3$$

$$|x_3 - x_2| = 0.03 > \epsilon$$

$$x_4 = 0.313$$

$$x_5 = 0.308$$

$$|x_5 - x_4| = 0.005 = \epsilon$$

$\therefore x_5$ is the root

<u>شرط تقارب طريقة نتوتن –رافسون:-</u>

ان صيغة نيوتن-رافسون تتمثل بالشكل التالي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\acute{f}(x_n)}, \qquad n = 1,2,3, \dots.$$

وعند ملاحظة الصيغة العامة للطريقة التكرارية للنقطة الصامدة $x_{n+1} = g(x_n)$ فان صيغة نيوتن-رافسون تكافئه

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\acute{f}(x)}$$

وبما ان شرط التقارب للطريقة التكرارية للنقطة الصامدة هي $|g'(x_0)| < 1$ فان

$$\acute{g}(x) = 1 - \frac{\acute{f}(x)\acute{f}(x) - f(x)f''(x)}{\left[\acute{f}(x)\right]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[\acute{f}(x)\right]^2}$$

وبهذا يكون شرط التقارب هو $\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{\left[\acute{f}(x_0)\right]^2}\right| < 1$

<u>واجب:-</u> اثبت بان حلول الامثلة السابقة التي تم حلها باستحدام طريقة نيوتن-رافسون متقاربة