مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\infty-\infty$$

لمعالجة هذه الحالة نجري الاتي:

$$\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x-1)}\left[3-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)}\left[3-\frac{1}{x+1}\right]=\infty\ \left[3-\frac{1}{2}\right]=\infty\ \left[\frac{5}{2}\right]=\infty$$

مثال: أحسب الغايتين

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}\right]\quad,\qquad \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(x+\frac{2}{x^2}\right)\right]$$

الاستمرارية The Continuity

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة continuous في العدد الحقيقي a أذا وفقط أذا كان a في مجالها وكان $\lim\limits_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$.

وبعبارة أخرى، تكون f مستمرة في العدد a أذا وفقط اذا حققت الشروط الثلاثة الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim\limits_{x\to \mathrm{a}} f(x)$ موجودة،

3) $\lim\limits_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$.

الرمز أو العلاقة الرياضية	المصطلح
$\lim\limits_{x\to \mathrm{a}} f(x)$	غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to \mathrm{a}$
$\lim\limits_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$	استمرارية الدالة $f(x)$ عند $x = \mathrm{a}$

ويقال للدالة أنها غير مستمرة discontinuous في a أذا لم تحقق شرطاً أو أكثر من الشروط الثلاثة المذكورة أعلاه. كما يقال للدالة f أنها مستمرة في فترة I أذا كانت مستمرة في كل نقطة في I . كما يقال أن f مستمرة (دائماً) اذا كانت مستمرة في كل عدد حقيقي.

مثال: أي دالة متعددة حدود تكون مستمرة في كل عدد حقيقي.

مثال: أفرض أن $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x \geq 0$. هذه الدالة مستمرة في كل عدد حقيقي موجب، لأنه، أذا كان $\mathrm{a} > 0$ ، فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = \lim_{x\to \mathrm{a}} \sqrt{x} = \sqrt{\mathrm{a}} = f(\mathrm{a})$$

ولكنها غير مستمرة في العدد 0 ، لأن $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ غير موجودة. وهكذا تكون الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستمرة في الفترة $\mathbb{R}^+$ (أي في الفترة $(0, \infty)$) .

مثال: هل الدالة المعرفة بـــ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \quad , \quad x \neq -3 & \text{عندما} \\ -6 \quad , \quad x = -3 & \text{عندما} \end{cases}$$

مستمرة في العدد -3 ؟.

الحل:

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to-3} (x-3) = -6 = f(-3)$$

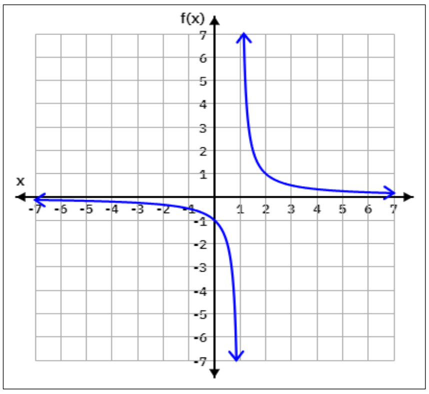
أذاً الدالة مستمرة في العدد -3 .

مثال: هل الدالة $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ مستمرة في العدد 1 ؟.

الحل: واضح أن هذه الدالة غير معرفة في العدد 1 ، أي ، $f(1)$ غير موجودة. كما أن

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

أذاً، الدالة غير مستمرة في العدد 1.



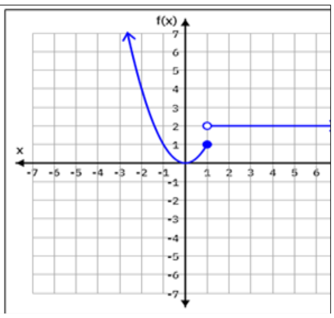
$y = f(x) = \frac{1}{x-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$

$R_f = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$

مثال: تأمل الدالة المعرفة بـــ

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 1 \text{ عندما} \\ 2 & , \quad x > 1 \text{ عندما} \end{cases}$$



هل الدالة g مستمرة في العدد 1 ؟ ولماذا ؟ أرسم مخططها.

الحل: واضح أن الدالة g معرفة في العدد 1 ، وأن $g(1) = (1)^2 = 1$

والان نوجد الغاية من يمين العدد 1 والغاية من يساره،

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} (2) = 2$$
$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2) = (1)^2 = 1$$

بما أن الغاية اليمنى لا تساوي الغاية اليسرى في العدد 1 ، فأن $\lim_{x\to1} g(x)$ غير موجودة. وبناء على ذلك، فأن g غير مستمرة عند $x = 1$.

مثال: تأمل الدالة f المعرفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases}2x-5\ , & x\neq 1 \text{ عندما} \\ 2\ , & x=1 \text{ عندما}\end{cases}$$

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2(1)-5=-3$

بينما $f(1)=2$ لذلك فأن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$. وعليه فأن الدالة f غير مستمرة عند $x=1$.

مثال: الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}\ , & x\neq 1 \text{ عندما} \\ 1\ , & x=1 \text{ عندما}\end{cases}$$

غير مستمرة عندما $x=1$ ، لأن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ ، ولكن $f(1)=1$.

مثال: أفرض أن $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.

هذه الدالة غير مستمرة عندما $x=2$ ، لأن $f(2)$ غير معرفة، ومع ذلك

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

مثال: أفرض أن $x\neq 1\ ,\ f(x)=\frac{1}{x-1}$.

هذه الدالة غير مستمرة في العدد 1 ، لأن $f(1)$ غير موجودة، وكذلك الغاية غير موجودة.

مثال: أفرض أن $f(x)=\frac{1}{x}$

هذه الدالة غير مستمرة عندما $x=0$ ، لأن $f(0)$ غير موجودة (أو غير معرفة)، وكذلك الغاية غير موجودة.

مبرهنات في الاستمرارية

مبرهنة: لتكن f و g دالتين مستمرتين في العدد a . فان

$$f\cdot \mathrm{g}\ ,\ \ f-\mathrm{g}\ ,\ \ f+\mathrm{g}$$

مستمرة عند a. كذلك $\frac{f}{\mathrm{g}}$ مستمرة عند a عندما $\mathrm{g(a)}\neq 0$.

مبرهنة: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متعددة الحدود، بحيث أن لكل $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\mathrm{a_n}\,x^{\mathrm{n}}+\mathrm{a_{n-1}}\,x^{\mathrm{n-1}}+\mathrm{a_{n-2}}\,x^{\mathrm{n-2}}+\cdots+\mathrm{a_1}\,x+\mathrm{a_0}$$

فأن f مستمرة في $\mathbb{R}$.

مبرهنة: لتكن $f: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ دالة نسبية، بحيث أن لكل $x \in \mathrm{D}$

$$f(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{h}(x)}$$

وأن $\mathrm{D} = \{x: x \in \mathbb{R}, \mathrm{h}(x) \neq 0\}$ ، فأن f مستمرة في D .

الأستمرارية في فترة

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة في الفترة المفتوحة (a, b) أذا كانت مستمرة في كل عدد حقيقي في (a, b) .

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستمرة في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$.

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة من اليمين في العدد a أذا وفقط أذا أستوفت الشروط الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim_{x \to \mathrm{a}^+} f(x)$ موجودة،

3) $\lim_{x \to \mathrm{a}^+} f(x) = f(\mathrm{a})$.

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستمرة من اليمين عند $x = 0$ ، لأن

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة من اليسار في العدد a أذا وفقط أذا أستوفت الشروط الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim_{x \to \mathrm{a}^-} f(x)$ موجودة،

3) $\lim_{x \to \mathrm{a}^-} f(x) = f(\mathrm{a})$.

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير مستمرة من اليسار عند $x = 0$ ، لأن $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ غير موجودة.

مثال: تأمل الدالة $x \leq 2 \;,\; f(x) = \sqrt{2 - x}$. واضح أن

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0 = f(2)$$

وعليه، فأن هذه الدالة مستمرة من اليسار في العدد 2 ، ولكنها غير مستمرة من اليمين في العدد 2 .

مثال: أفرض أن

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & , \quad x\le 2 \\ x+1 & , \quad 2<x<3 \\ 4 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$$

بين فيما أذا كانت الدالة مستمرة عند $x=2\,,3$ وما نوع استمراريتها ؟.

ملاحظة: تكون الدالة مستمرة في عدد ما a اذا وفقط أذا كانت مستمرة من اليمين ومستمرة من اليسار في العدد a .

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ أذا وفقط أذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة (a,b) ، ومستمرة من اليمين في العدد a ومستمرة من اليسار في العدد b .

أي أن الدالة f تكون مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ أذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة (a,b) ، و معرفة عند a و b بحيث يكون:

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b) \qquad , \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستمرة في الفترة $[0,\infty)$

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$ مستمرة في الفترة $(-\infty,2]$

مثال: أثبت أن الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ مستمرة في الفترة $[-1,1]$

الحل: واضح أن f مستمرة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$. فمثلاً لو أخذنا $0\in(-1,1)$ ، فأن

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1-x^2}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-x^2}=1=f(0)$$

والان نبرهن ان f مستمرة عن يمين العدد $x=-1$ وعن يسار العدد $x=1$. بما أن

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0=f(-1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0=f(1)$$

فأن f مستمرة من اليمين في العدد -1 ، ومستمرة من اليسار في العدد 1 . وبذلك، تكون f مستمرة في الفترة المغلقة $[-1,1]$.

مثال: جد كل قيم x التي تكون فيها الدالة غير مستمرة

$$f(x)=\frac{x^5+x^3-4x^2+2}{x^2-5x+6}$$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ كسرية (نسبية)، فأنها مستمرة عند كل الأعداد الحقيقية، عدا الاعداد x التي تحقق المعادلة $x^2-5x+6=0$ (أي ما عدا الأعداد التي تجعل المقام صفراً)، أي أن $(x-3)(x-2)=0$ ، وهذا يعني $x=2$ ، $x=3$.

مثال: جد الفترة أو الفترات التي تكون فيها الدالة مستمرة

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2-9}$$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ كسرية، فأنها مستمرة في كل نقطة في مجالها. مجال الدالة $f(x)$ هو جميع الاعداد الحقيقية ما عدا الاعداد التي تحقق المعادلة $x^2-9=0$ ، أي أن $(x-3)(x+3)=0$ ، وهذا يعني $x=\pm 3$. أذاً مجال هذه الدالة هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $x=3$ ، $x=-3$. ونعبر عن ذلك بالشكل:

$$(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$$

أذاً الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$.

مثال: أدرس استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases}3x-4\ , & x<2\\ 3x+4\ , & x\geq 2\end{cases}$$

الحل:

من تعريف هذه الدالة، نرى أن $f(x)=3x-4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أصغر من 2 . بما أن $3x-4$ دالة متعددة حدود، فأنها مستمرة عند أي عدد حقيقي اصغر من 2 كذلك من التعريف نجد أن $f(x)=3x+4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2 ، وهي أيضاً دالة متعددة حدود.

نستطيع القول أن $f(x)$ دالة مستمرة لكل عدد حقيقي اصغر من 2 ، وكذلك دالة مستمرة عند أي عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2 .

والان نبحث أستمرارية الدالة عندما $x=2$.

- $f(2)=3(2)+4=10$ معرفة
- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x-4)=3(2)-4=2$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x+4)=3(2)+4=10$

بما أن $\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ ، فأن $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة. وبالتالي فأن الدالة غير مستمرة عند $x=2$. أذاً الدالة مستمرة عند أي عدد حقيقي ما عدا $x=2$.

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث أن $f(x)=\begin{cases}x^2+2\ , & x\geq 2\\ 8-x\ , & x<2\end{cases}$. اثبت أن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

مثال: أذا كانت الدالة f مستمرة عند $x=-2$ ، جد قيمة $\mathrm{a}\in\mathbb{R}$ اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{a}x+3 & , \quad x\leq -2\\ x^2+x & , \quad x>-2\end{cases}$$

المشتقات **The Derivatives**

تعريف:

المشتقة للدالة f هي دالة، يرمز لها f' ، بحيث أن قيمتها في كل عدد x في مجال f معطاة بـــ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه الغاية موجودة.

وتقرأ $f'(x)$ مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة لــ x . وهناك رموز أخرى تستعمل لمشتقة الدالة $\mathrm{y} = f(x)$ بالنسبة الى x ، وهي $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$, y' .

قد يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a ، وعندئذ تكون قيمتها $f'(\mathrm{a})$ ويقال أن الدالة قابلة الأشتقاق differentiable في a ، كما قد يحدث خلاف ذلك، أي قد لا يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في a لعدم وجود الغاية، وفي هذه الحالة يقال أن الدالة غير قابلة الأشتقاق في a .

ويقال أن الدالة $f(x)$ قابلة الأشتقاق في الفترة I أذا كانت قابلة الأشتقاق في كل عدد x في I وقد تكون الدالة قابلة الأشتقاق في كل نقاط مجالها.

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x بأستعمال التعريف نتبع الخطوات الاتية:

1) نحسب $f(x + \Delta x)$
2) نحسب الفرق $f(x + \Delta x) - f(x)$
3) نحسب المقدار $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ نحسب الغاية $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مثال: جد مشتقة الدالة بأستعمال التعريف

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

ثم أستعمل النتيجة لأيجاد قيمة المشتقة عندما $x = 3$ (أي أيجاد $f'(3)$) .

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2$$