$$= \int (2x+3)\,\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\frac{-5}{2}}{(x-2)} + \frac{\frac{9}{2}}{(x-4)} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int (2x+3)\,\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)} + \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)}$$
$$= x^2 + 3x - \frac{5}{2}\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-4| + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب التكامل $\int \frac{2\,x+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

الحل: لا يمكن حساب هذا التكامل مباشرة لان البسط ليس مشتقة للمقام. ولاحظ ايضاً أن درجة البسط أصغر من درجة المقام. لذلك نقوم بتحليل المقام

$$\frac{2\,x+1}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{\mathrm{A}_1}{(x-2)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x+2)}$$

بضرب الطرفين في $(x-2)\cdot(x+2)$ ينتج

$$2\,x+1 = \mathrm{A}_1\cdot(x+2) + \mathrm{A}_2\cdot(x-2)$$

نعوض عن x بالقيم 2 و -2 .

عندما $x = 2$ ، فأن

$$2\,(2)+1 = \mathrm{A}_1\cdot(2+2) + \mathrm{A}_2\cdot(2-2)$$
$$5 = 4\,\mathrm{A}_1 \Longrightarrow \mathrm{A}_1 = \frac{5}{4}$$

عندما $x = -2$ ، فأن

$$2\,(-2)+1 = \mathrm{A}_1\cdot(-2+2) + \mathrm{A}_2\cdot(-2-2)$$
$$-4+1 = -4\,\mathrm{A}_2 \Longrightarrow \mathrm{A}_2 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

وبالتعويض عن A_1 و A_2 بقيمتيهما، نحصل على

$$\frac{2\,x+1}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)} + \frac{\frac{3}{4}}{(x+2)}$$

أذاً

$$\int \frac{2\,x+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{5}{4}}{(x-2)} + \frac{\frac{3}{4}}{(x+2)} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)} = \frac{5}{4}\,\ln|x-2| + \frac{3}{4}\,\ln|x+2| + \mathrm{C}$$

مثال: أوجد $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$

الحل: نكتب

$$\frac{2x+8}{x^2+4x+3} = \frac{2x+8}{(x+1)(x+3)} = \frac{\mathrm{A}}{(x+1)} + \frac{\mathrm{B}}{(x+3)}$$

نضرب طرفي المعادلة بـــ $(x+1)(x+3)$ وعوض $x=-1$ و $x=-3$ فنحصل على $\mathrm{A}=3$ ، $\mathrm{B}=-1$

أي ان:

$$\frac{\mathrm{A}}{(x+1)} + \frac{\mathrm{B}}{(x+3)} = \frac{3}{(x+1)} - \frac{1}{(x+3)}$$

وعليه:

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx = \int \left(\frac{3}{(x+1)} - \frac{1}{(x+3)}\right) dx$$

$$= \int_1^5 \frac{3}{x+1}\,dx - \int_1^5 \frac{1}{x+3}\,dx = 3\ln|x+1| \Big|_1^5 - (\ln|x+3|) \Big|_1^5$$

$$= 3(\ln 6 - \ln 2) - (\ln 8 - \ln 4) = 3\ln\frac{6}{2} - \ln\frac{8}{4} = 3\ln 3 - \ln 2$$

أمثلة (واجب): أحسب التكاملات الاتية:

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx\,, \quad \int \frac{x-2}{x^3-x}\,dx \quad , \quad \int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx \quad , \quad \int \frac{2x}{x^2-4x-12}\,dx$$

$$\int \frac{x^4-x^3+4x-2}{x-2}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} \quad , \quad \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+6} \quad , \quad \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx \quad , \quad \int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} \quad , \quad \int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx$$

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx$$

ثانياً: أذا تحلل المقام الى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) بعضها (أو كلها) مكررة

$$g(x) = (x \pm r)^n$$

حيث أن n عدد صحيح موجب. فأن:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x \pm r)} + \frac{A_2}{(x \pm r)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x \pm r)^n}$$

حيث أن $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال: أحسب التكامل $\int \frac{x-2}{(x+1)^3}\,dx$

الحل: لا يمكن حساب هذا التكامل مباشرة لان البسط ليس مشتقة للمقام. ولاحظ ايضاً أن درجة البسط أصغر من درجة المقام. لذلك نقوم بتحليل المقام

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$$

بضرب الطرفين في $(x+1)^3$ ينتج

$$x - 2 = A_1 \cdot (x+1)^2 + A_2 \cdot (x+1) + A_3$$

عندما $x = -1$ ، فأن

$$-1 - 2 = A_1 \cdot (-1+1)^2 + A_2 \cdot (-1+1) + A_3$$

$$-3 = 0 + 0 + A_3 \Longrightarrow A_3 = -3$$

ولإيجاد قيمة $A_2\,, A_1$ نفرض أية قيمة لـــ x ولتكن $x = 0, 1$.

عندما $x = 0$ ، فأن

$$0-2 = A_1 \cdot (0+1)^2 + A_2 \cdot (0+1) + A_3$$
$$-2 = A_1 + A_2 - 3 \Longrightarrow A_1 + A_2 = 1 \Longrightarrow A_2 = 1 - A_1$$

عندما $x = 1$ ، فأن

$$1-2 = A_1 \cdot (1+1)^2 + A_2 \cdot (1+1) + A_3$$
$$-1 = 4\,A_1 + 2\,A_2 - 3 \Longrightarrow 4\,A_1 + 2\,A_2 = 2 \Longrightarrow 2A_1 + A_2 = 1$$
$$\Longrightarrow A_2 = 1 - 2A_1$$

الان من المعادلتين $A_2 = 1 - A_1$, $A_2 = 1 - 2A_1$ نحصل على

$$1 - 2A_1 = 1 - A_1 \Longrightarrow A_1 = 0$$

أذاً $A_2 = 1$. وبالرجوع الى التكامل، يكون لدينا

$$\int \frac{x-2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}\right)\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{0}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

مثال: أحسب التكامل $\int \frac{3\,x+5}{(x+1)\cdot(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

الحل: لا يمكن حساب هذا التكامل مباشرة. ولاحظ ايضاً أن درجة البسط أصغر من درجة المقام.

$$\frac{3\,x+5}{(x+1)\cdot(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

بضرب الطرفين في $(x+1)\cdot(x-1)^2$ ينتج

$$3\,x + 5 = A_1 \cdot (x-1)^2 + A_2 \cdot (x+1)\cdot(x-1) + A_3 \cdot (x+1)$$

نعوض عن x بالقيم 1 و -1 . عندما $x = -1$ ، فأن

$$\mathbf{3\,(-1) + 5 = A_1 \cdot (-1-1)^2 + A_2 \cdot (-1+1)\cdot(-1-1) + A_3 \cdot (-1+1)}$$
$$2 = 4\;A_1 + 0 + 0 \Longrightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

عندما $x = 1$ ، فأن

$$3\,(1) + 5 = A_1 \cdot (1-1)^2 + A_2 \cdot (1+1)\cdot(1-1) + A_3 \cdot (1+1)$$
$$8 = 0 + 0 + 2\,A_3 \Longrightarrow A_3 = 4$$

ولأيجاد قيمة A_2 نفرض أية قيمة لــ x ولتكن $x = 0$ ، فنحصل على

$$3\,(0) + 5 = A_1 \cdot (0-1)^2 + A_2 \cdot (0+1)\cdot(0-1) + A_3 \cdot (0+1)$$
$$5 = A_1 - A_2 + A_3 \Longrightarrow 5 = \frac{1}{2} - A_2 + 4 \Longrightarrow A_2 = \frac{-1}{2}$$

وبالرجوع الى التكامل، يكون لدينا

$$\int \frac{3\,x+5}{(x+1)\cdot(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{A}_1}{(x+1)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-1)} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \mathrm{C} \;= -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \mathrm{C}$$

Example: Evaluate $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(x-1)^2}$

Solution: $\frac{1}{x\cdot(x-1)^2} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x-1} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-1)^2}$

تكملة الحل واجب.

Example: Evaluate $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\mathrm{d}x$

Solution: $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$

$\frac{1}{x^3-4x^2+4x} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x-2} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-2)^2}$ تكملة الحل واجب

Example: Evaluate $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\mathrm{d}x$

Solution: $\frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2} = \frac{3+x+x^2}{x^2(x+2)}$ $\quad\therefore\quad$ $\frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{x+2}$

نضرب طرفي المعادلة في $x^2(x+2)$:

$$3 + x + x^2 = \mathrm{A}_1 x(x+2) + \mathrm{A}_2(x+2) + \mathrm{A}_3 x^2$$

عوض عن $x = 0$:

$$3 = 0 + \mathrm{A}_2(0+2) + 0 \Longrightarrow \mathrm{A}_2 = \frac{3}{2}$$

عوض عن $x = -2$:

$$3 - 2 + 4 = 0 + 0 + 4\mathrm{A}_3 \Longrightarrow 5 = 4\mathrm{A}_3 \Longrightarrow \mathrm{A}_3 = \frac{5}{4}$$

ومن تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على:

$$1 = 2\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 \Longrightarrow 1 = 2\mathrm{A}_1 + \frac{3}{2} \Longrightarrow \mathrm{A}_1 = \frac{-1}{4}$$
$$\therefore \quad \int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{-1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{4}\ln|x| - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4}\ln(x+2) + \mathrm{C}$$

مثال: أوجد $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$

الحل: بما أن درجة البسط يساوي درجة المقام، أذاً نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & & \\
\hline
x^2-4x+4 & x^2 & -3x & +7 \\
- & x^2 & -4x & +4 \\
\hline
 & & x & +3
\end{array}
$$

Therefore, $\dfrac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \dfrac{x+3}{x^2-4x+4}$

الحدود النسبية:

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب الطرفين في $(x-2)^2$:

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

بالتعويض عن $x=2$ ، نحصل على: $A_2 = 5$.

من تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على: $A_1 = 1$.

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)} + \int \frac{5\,\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

مثال: أحسب التكامل $\int \frac{x^4-2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1}\mathrm{d}x$

الحل: بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، أذا نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & x & -1 & \leftarrow \text{ناتج القسمة} & \\
\hline
x^3-x^2-x+1 & x^4 & -2x^3 & & +4x & +2 \\
- & x^4 & -x^3 & -x^2 & +x & \\
\hline
 & & -x^3 & +x^2 & +3x & +2 \\
- & & -x^3 & +x^2 & +x & -1 \\
\hline
 & & & & 2x & +3 \leftarrow \text{الباقي}
\end{array}
$$

Therefore, $\dfrac{x^4-2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1} = x - 1 + \dfrac{2x+3}{x^3-x^2-x+1}$

$$\frac{2x+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

نضرب المعادلة في $(x+1)(x-1)^2$:

$$2x+3 = A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)$$

نعوض عن $x=1$ ، فنحصل على:

$$5 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{5}{2}$$

نعوض عن $x=-1$ ، فنحصل على:

$$1 = 4\mathrm{A}_1 \Longrightarrow \mathrm{A}_1 = \frac{1}{4}$$

نعوض قيم $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3$ و $x = 0$ في المعادلة السابقة، فنحصل على:

$$3 = \frac{1}{4} - \mathrm{A}_2 + \frac{5}{2} \Longrightarrow \mathrm{A}_2 = -3 + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{-1}{4}$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x - 1 + \frac{\mathrm{A}_1}{(x+1)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-1)} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int (x-1)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)} + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\cdot(x-1)}$

الحل: $\frac{1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-1)}$

نجد أن: $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = -1$ و $\mathrm{A}_3 = 1$. وعليه فأن:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\cdot(x-1)} = \int \frac{-1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)}\mathrm{d}x$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x+1| + \mathrm{C}$$

أحسب التكاملات الاتية:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot(x+2)^2} \quad , \quad \int \frac{3\,x+5}{(1-2x)^2}\mathrm{d}x \quad , \quad \int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$$

ثالثاً: أذا تحلل المقام الى عوامل بعضها (أو كلها) من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل

نتبع الخطوات السابقة نفسها مع مراعاة الاتي:

كل عامل في مقام الكسر من الدرجة الثانية يقابله كسر جزئي مقامه ذلك العامل وبسطه مقدار عام من الدرجة الأولى $\mathrm{A}_{n-1}\,x + \mathrm{A}_n$. فمثلاً أذا كانت

$$\mathrm{g}(x) = (x \pm \mathrm{r}_1)\cdot(x \pm \mathrm{r}_2)\cdot\,(x^2 + \mathrm{r}_3)$$

فأن:

$$\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \frac{f(x)}{(x \pm \mathrm{r}_1)\cdot(x \pm \mathrm{r}_2)\cdot\,(x^2 + \mathrm{r}_3)} = \frac{\mathrm{A}_1}{x \pm \mathrm{r}_1} + \frac{\mathrm{A}_2}{x \pm \mathrm{r}_2} + \frac{\mathrm{A}_3\,x + \mathrm{A}_4}{x^2 + \mathrm{r}_3}$$

حيث أن $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال: جد ناتج التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$

الحل: $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2\,x+\mathrm{A}_3}{x^2+1}$

المقام محلل الى عاملين أوليين أحدهما من الدرجة الثانية، لذا يكون لدينا كسران جزئيان. بالضرب في $x\cdot(x^2+1)$

$$1 = A_1 \cdot (x^2+1) + (A_2\, x + A_3) \cdot x$$

عندما $x = 0$ ، فأن

$$1 = A_1 \cdot (0^2+1) + (A_2\,(0) + A_3) \cdot 0 \Longrightarrow A_1 = 1$$

ومن تساوي معاملات x^2 في الطرفين نحصل على

$$0 = A_1 + A_2 \Longrightarrow 0 = 1 + A_2 \Longrightarrow A_2 = -1$$

ومن تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على $0 = A_3$

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{A_1}{x}\,dx + \int \frac{A_2\,x + A_3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln|x| - \ln\sqrt{x^2+1} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \frac{x^2-5x+4}{(x+2)\cdot(x^2+5)}\,dx$

الحل: المقام محلل الى عاملين أوليين أحدهما من الدرجة الثانية، لذا يكون لدينا كسران جزئيان.

$$\frac{x^2-5x+4}{(x+2)\cdot(x^2+5)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2\,x + A_3}{x^2+5}$$

$$x^2-5x+4 = A_1 \cdot (x^2+5) + (A_2\,x + A_3) \cdot (x+2)$$

عندما $x = -2$ ، فأن

$$(-2)^2 - 5(-2) + 4 = A_1 \cdot ((-2)^2+5) + (A_2\,(-2) + A_3) \cdot \big((-2)+2\big)$$
$$18 = A_1 \cdot (9) \Longrightarrow A_1 = 2$$

ومن تساوي معاملات x^2 في الطرفين نحصل على

$$1 = A_1 + A_2 \Longrightarrow 1 = 2 + A_2 \Longrightarrow A_2 = -1$$

ومن تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على

$$-5 = 2\,A_2 + A_3 \Longrightarrow -5 = 2(-1) + A_3 \Longrightarrow A_3 = -3$$
$$\therefore \int \frac{x^2-5x+4}{(x+2)\cdot(x^2+5)}\,dx = \int \frac{A_1}{x+2}\,dx + \int \frac{A_2\,x + A_3}{x^2+5}\,dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{x+3}{x^2+5}\,dx = 2\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{x}{x^2+5}\,dx - 3\int \frac{dx}{x^2+5}$$

$$= 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx - 3\int \frac{dx}{x^2+5}$$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + C \;= \ln(x+2)^2 - \ln\sqrt{x^2+5} - \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \frac{2}{3x^3+6x+x^2+2}\,dx$

الحل: درجة البسط أصغر من درجة المقام والبسط ليس مشتقة للمقام. أذا نقوم بتحليل المقام.

$$3x^3 + 6x + x^2 + 2 = 3x(x^2+2) + (x^2+2) = (3x+1)\cdot(x^2+2)$$

المقام محلل الى عاملين أوليين أحدهما من الدرجة الثانية، لذا يكون لدينا كسران جزئيان.

$$\frac{2}{(3x+1)\cdot(x^2+2)}=\frac{\mathrm{A}_1}{3x+1}+\frac{\mathrm{A}_2\,x+\mathrm{A}_3}{x^2+2}$$

$$2=\mathrm{A}_1(x^2+2)+(\mathrm{A}_2\,x+\mathrm{A}_3)\cdot(3x+1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (*)$$

بالتعويض عن $x=\frac{-1}{3}$ ، نحصل على:

$$2=\mathrm{A}_1\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^2+2\right)\Rightarrow \mathrm{A}_1=\frac{2}{\frac{1}{9}+2}=\frac{18}{1+18}=\frac{18}{19}$$

بالتعويض عن A_1 في المعادلة (*) ومن تساوي معاملات x^2 في الطرفين نحصل على:

$$0=\frac{18}{19}+3\mathrm{A}_2\ \Rightarrow 3\mathrm{A}_2=-\frac{18}{19}\Rightarrow \mathrm{A}_2=\frac{-6}{19}$$

بالتعويض عن A_2 في المعادلة (*) ومن تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على:

$$0=\left(\frac{-6}{19}\right)+3\mathrm{A}_3\Rightarrow 3\mathrm{A}_3=\frac{6}{19}\Rightarrow \mathrm{A}_3=\frac{2}{19}$$

$$\therefore\quad \int\frac{2}{3x^3+6x+x^2+2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\mathrm{A}_1}{3x+1}+\frac{\mathrm{A}_2\,x+\mathrm{A}_3}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{A}_1}{3x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{A}_2\,x+\mathrm{A}_3}{x^2+2}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{18}{19}}{3x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{-6}{19}\,x+\frac{2}{19}}{x^2+2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{18}{19}\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x+\frac{2}{19}\int\frac{-3x+1}{x^2+2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{18}{19}\int\frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x+\frac{2}{19}\left(\int\frac{-3x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{19}\ln|3x+1|-\frac{3}{19}\cdot\ln|x^2+2|+\frac{2}{19}\int\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{19}\ln|3x+1|-\frac{3}{19}\ln|x^2+2|+\frac{2}{19}\int\frac{1}{\frac{2x^2}{2}+2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{19}\ln|3x+1|-\frac{3}{19}\ln|x^2+2|+\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{19}\ln|3x+1|-\frac{3}{19}\ln|x^2+2|+\frac{1}{19}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{19}\ln|3x+1|-\frac{3}{19}\ln(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{19}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\mathrm{C}$$