New(Z)=

$$\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,0,\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M,-M,\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,0,10+20M\right]-\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right]*\left[1,0,\frac{1}{5},\frac{-3}{10},\frac{-1}{5},\frac{3}{10},6\right]$$

$$\left[0,0,0,\frac{-1}{2},-M,\frac{1}{2},M,20\right]$$

$$\text{New }(X_2)=\left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10\right]$$

$$=\left[0,1,\frac{-2}{3},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{-1}{10},8\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثالث، وكالآتي:

Table 3

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S
Z^*	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-M	$\frac{1}{2}$-M	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6

وبما إن جميع المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) أقل من او تساوي الصفر، أي إن ($C_j \leq 0$)، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 6,\ X_2 = 8,\ Z^* = 20$

الاستنتاج:

يتضح من نتائج الجدول السابق، الذي يتضمن الحل الأمثل للمشكلة، يتضح بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (6) وحدات من المنتج الثاني (X_1)، و

إنتاج (8)وحدات من المنتج (X_2)، وبما يحقق لها أقل التكاليف الإنتاجية والبالغة (20) دينار .

2-5-2 طريقة ذات المرحلتين Two- Phase Method

تعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة (M) الكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (L.P) في حالة التقليل (Minimization)، إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن نتأكد بأن هناك حل لنموذج، وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (r) مساوية للصفر . أي إن ($r = 0$)، وبعدمه فلا يوجد حل للنموذج، ويتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين، وعلى النحو الآتي:

أ. المرحلة الأولى:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_1) لقيود النموذج فقط.
2. صياغة دالة هدف جديدة (r) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية (R_1)، أي إن:

$$r = R_1 - R_2 - \dots R_n \rightarrow Min$$

3. تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، اعتماداً على معاملات لمتغيرات ($R_1, S_1,$ X_j) في قيود لنموذج، ودالة الهدف الجديدة (r).
4. نتبع الخطوات السابقة، حتى نحصل على قيمة ($r = 0$). مما يعني وجود حل للنموذج، والمقترنة في كون ($C_j \leq 0$) لجميع معاملات دالة الهدف (r).

ب. المرحلة الثانية:

1. اعتماد الحل الأساسي النهائي في الخطوة (4) من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R)، ودالة الهدف (r).
2. اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، وتحسين قيمتها، للحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

3. في حالة وجود أحد المعاملات (C_j) أكبر من الصفر($C_j > 0$) في صف دالة الهدف (Z)، يعاد إجراء نفس الخطوات حتى يتم الحصول على جميع المعاملات (C_j) أقل أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \leq 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل للنموذج.

مثال (13):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة المرحلتين؟.

Example 13: Find the optimal solution for (L.P)Model using Two-phase Method?.

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

S. t.

$$X_1+3X_2 \geq 30$$
$$4X_1+2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

المرحلة الأولى:

1. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1+X_2- 0S_1 - 0S_2$$

S. t.

$$X_1+3X_2 - S_1 \quad = 30$$
$$4X_1+2X_2 \quad - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم (S_1) و (S_2) ظهرت سالبة وهي على الترتيب ($S_2= -40, S_1 = -30$)، مما يتقاطع ذلك مع شرط عدم السلبية ($S_1 , S_2 \geq 0$)، عليه سيتم إضافية المتغيرات الاصطناعية (R_2, R_1) للقيود، على النحو الآتي:

$$X_1+3X_2 - S_1+ R_1= 30 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$4X_1+2X_2 - S_2 + R_2 = 40 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$X_1, X_2 , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 \geq 0$$

3. صياغة دالة هدف جديدة، (r)، اعتماداً على قيم (R_2 ، R_1)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذ إن:

من المعادلتين (1) و (2)، نحصل على:

$$r = R_1 + R_2 \rightarrow Min$$

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 = 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \end{array}\right\}$$

نعوض قيمة (R_1) و (R_2) الواردة بالعلاقة (3)، في دالة الهدف الجديدة (r)، وكالآتي:

$$\begin{aligned} \text{Min } r &= (30 - X_1 - 3X_2 + S_1) + (40 - 4X_1 - 2X_2 - S_2) \\ &= 70 - 5X_1 - 5X_2 + S_1 + S_2 \end{aligned}$$

$$r + 5X_1 + 5X_2 - S_1 - S_2 = 70$$

4. تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، وعلى النحو الآتي:

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	5	5	-1	-1	0	0	70	-
R_1	1	3	-1	0	1	0	30	30
R_2	4	2	0	-1	0	1	40	10

الصف المحوري   العمود المحوري   العنصر المحوري

أ. المتغير الداخل (X_1)، ولمتغير الخارج (R_2)، والعنصر المحوري هو (4).

ب. المعادلة المحورية، تكتب على الوجه الآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{4},0,\frac{1}{4},10\right]$$

ج. قيم (r) و (R_1) الجديدتين، تعطى على النحو الآتي:

$$\text{New (r)} = [5, 5,-1,-1,0,0,70] \text{ -5* } \left[1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{4},0,\frac{1}{4},0\right]$$

$$\text{New (r)} = \left[0,\frac{5}{2},-1,\frac{1}{4},0,-\frac{5}{4},20\right]$$

$$\text{New } (R_1) = \left[0,\frac{5}{2},1,\frac{1}{4},1,\frac{-1}{4},30\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثاني، وكالآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	20	-
R_1	0	$\left(\frac{5}{2}\right)$	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	20	8
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	10	20

الصف المحوري العمود المحوري المنصر المحوري

أ. المتغير الداخل (X_2)، والمتغير الخارج (R_1)، والعنصر المحوري هو $\left[\frac{5}{2}\right]$.

ب. المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[0,1,\frac{-2}{5},\frac{1}{10},,\frac{2}{5},-\frac{1}{10},8\right]$$

ج. إيجاد قيم (r) و (X) الجديدتين، على النحو الآتي:

$$\text{New (r)} = \left[0,\frac{5}{2},-1,\frac{1}{4},0,\frac{-5}{4},20\right] \frac{5}{2} \text{-* } \left[0,1,\frac{-2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{-1}{10},8\right]$$

$$= [0,0,0,0,-1,-1,0]$$

New (X_1) =

$$\left[1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{4},0,-\frac{1}{4},10\right]-\frac{1}{2}*\left[0,1,\frac{-2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{-1}{10},8\right]$$

$$=\left[1,0,\frac{1}{5},,\frac{-3}{10},,\frac{-1}{5},\frac{3}{10},6\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثالث، وكالآتي:

Table 3

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	0	0	0	0	-1	-1	0	-
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8	-
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6	-

د. بما إن قيمة دالة الهدف $(r = 0)$، والمقترنة ب $(C_j \leq 0)$، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج، والاستمرار بالمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

1. اعتماد نتائج الحل الأساسي النهائي الوارد بالجدول الثالث من المرحلة الأولى. بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1) و(R_2)، ودالة الهدف (r) من الجدول.
2. اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، والتي هي:

Min. $Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2$

ونقوم بتحسين قيمتها، للحصول على الحل الأمثل النهائي، وعلى النحو الآتي:

Table 4

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i^*)
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	2	1	0	0	0
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	9

وبعد استبعاد قيم (R_2 و R_1)، ودالـة الهدف (r) من جدول الحل الأخير، وإضـافة دالـة الهدف الأصـلية (Z) للجدول، نقوم بكتابـة القيـود اعتمـاداً علـى نتـائج الجـدول النهائي، وعلى النحو الآتي:

$$X_2 - \frac{2}{5}S_1 + \frac{1}{10}S_2 = 8 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$X_1 + \frac{1}{15}S_1 - \frac{3}{10}S_2 = 6 \ldots\ldots\ldots(2)$$

من المعادلتين (1) و (2)، نحصل على قيم (X_2 , X_1)، كالآتي:

$$X_2 = 8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2$$

$$X_1 = 6 - \frac{1}{5}S_1 + \frac{3}{10}S_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض قيم (X_2 , X_1) الواردة بالعلاقة (3) في دالة الهدف الأصلية (Z)، ينتج:

$$\because Z = 2X_1 + X_2$$

$$\therefore Z = 2*\left[6 - \frac{1}{5}S_1 + \frac{3}{10}S_2\right] + \left[8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2\right]$$

$$= 12 - \frac{2}{5}S_1 + \frac{6}{10}S_2 + 8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2$$

$$= 20 + \frac{5}{10}S_2$$

$$Z - \frac{1}{2}S_2 = 20$$

نقوم بوضع نتيجة دالة الهدف الأصلية (Z) النهائية، في جدول الحل النهائي، وكالآتي:

Table 5

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i')
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z^*	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6

يتضح من نتائج جدول الحل النهائي، بأن جميع معاملات دالة الهدف (Z)، هي أقل من وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \leq 0)$، عليه فإن الحل النهائي، يكون كالآتي:
$X_1 = 6, X_2 = 8\ Z^* = 20$

وهو نفس النتيجة التي تم التوصل إليها، بموجب طريقة (M) الكبيرة.

الاستنتاج: