$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det(B) = 8 - (-3) = \underline{11}$, $\det(C) = 10 - 0 = \underline{10}$, $|D| = 0 - (-1) = +1$, $|E| = -10 - (+12) = -10 - 12 = \underline{-22}$

② لايجاد محدد المصفوفة ذات سعة 3X3 ذلك من خلال اضافة العمود الاول والثاني على التوالي الى يمين المصفوفة ومن ثم ايجاد المجموع الجبري لحاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي الثلاثة مطروحاً منه المجموع الجبري لحاصل ضرب عناصر القطر الثانوية

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

~~مجموع عناصر ال~~

~~(مجموع عناصر~~

مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي الثلاثة - مجموع حاصل ضرب عناصر القطر المعاكس الثلاثة)

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Ex(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$= (16 + 6 + 75) - (20 + 10 - 36)$

$\therefore \det(A) = 97 - 66 = 31$

EX(2)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= (8+9+0) - (-2+0+0)$$

$$= 17 + 2 = \underline{19}$$

الطريقة الثانية لايجاد المحدد للمصفوفة ذات سعة 3X3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ +11 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(-15) - (-77)}{2} = \frac{-15 + 77}{2} = \frac{62}{2} = \underline{31}$$

نفس المثال (1)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

det(B)=19 ← الطريقة الاولى نفس EX(2)

الان الطريقة الثانية

$$= \left|\begin{matrix} 4 & 11 \\ -2 & 4 \end{matrix}\right| = \frac{16 - (-22)}{2} = \frac{16 + 22}{2}$$

$$= \frac{38}{2} = \underline{19}$$

4) ايجاد المحدد للمصفوفات ذات السعات الكبيرة (4x4) ، (5x5) ، --- ، (nxn)

هنالك ايضاً طريقتين :-

A) الطريقة الاولى ، وتسمى بالطريقة السريعة او الكديشة)

Ex: Find the ~~determinte~~ determinant of the matrix $A_{4\times4}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$\frac{1}{(a_{11})^{n-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}_{3\times3}$$

العنصر الاول من المصفوفة

حيث a_{11} هو العنصر الاول من المصفوفة

$(n-2)$ n عدد سعة المصفوفة المربعة

$$\therefore \frac{1}{(2)^{4-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -9 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{matrix}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(16-60+0)-(216+0+8)\Big]$$

$$=\frac{1}{4}(-44+224)\Big]=\frac{1}{4}(180)=\underline{\underline{45}}$$

24

اذا كانت المصفوفة اكبر من (4x4) اي 5x5 فانه

Ex(2): find the determinant of the matrix $A_{5\times5}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^{5-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}_{4\times4}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}_{4\times4}$$

اكرر العملية مرة ثانية واعتبر المصفوفة / اعلاه من 4x4

واعيد العملية من جديد

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{(-1)^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}_{3\times3} \right.$$

$$= \frac{1}{8} \left[(+1) \begin{vmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 12 & -16 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -8 & 6 \\ 0 & -4 \\ 12 & -10 \end{matrix} \right] = \frac{1}{8}\left[(0-144+0)-(0-160+0)\right]$$

$$= 1/8\,(16) = 2$$

Properties of determinants

خواص المحددات

(مهمة جداً)

1- If there is a row or column that is all zeros then the determinant is zero.

اذا كان هنالك صف او عمود كله اصفار فان المحدد = صفر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$$= (0+0+0) - (0+0+0) = 0$$

2- The determinant for the matrix is the same as for the transpose

المحدد للمصفوفة هو نفسه لمدور المصفوفة

$$|A| = |A^T|$$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 8 - 3 = 5$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A^T) = 8 - 3 = 5$$

3- When you replace a row in place of row or a column in place of column, the value of the determinant does not change, only the sign changes

عند ابدال صف مكان صف او عمود مكان عمود فان قيمة المحدد لا تتغير فقط الاشارة تتغير

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10 - 12 = -2$

when replace R_1 with R_2 ابدال R_1 مع R_2 فان

$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_1) = 12 - 10 = \underline{\underline{2}}$

نفس الرقم لكن عكس الاشارة

when replace C_1 with C_2

$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_2) = 12 - 10 = \underline{\underline{2}}$

4) When multiplying a row or column by constant, the value of the determinant is the product of multiplying the constant by the determinant value of the original matrix

عند ضرب صف او عمود بثابت فان قيمة المحدد هي حاصل ضرب ذلك الثابت بقيمة المحدد للمصفوفة الاصلية

Ex: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 12 - 10 = 2$

عند ضرب R_2 بـ 2

$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_1) = 24 - 20 = \underline{\underline{4}}$

وهي عبارة عن $\det(A) \times 2 = 4$

عند ضرب R_2 بـ -3 فان

$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_2) = -36 + 30 = -6$

وهي عبارة $\det(A) \times (-3) = \underline{\underline{-6}}$