6- طريقة القسمة التركيبية:- The synthetic division method

نفرض ان x^* تخمين لجذر المعادلة الاتية $f(x) = 0$. اذا كانت الدالة $f(x)$ هي متعددة حدود من الدرجة n عندئذ يمكن كتابتها كما يلي

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

ومعاملاتها حقيقية وبقسمة المعادلة على $(x - x^*)$ نحصل على

$$\frac{f(x)}{(x - x^*)} = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1} + \frac{b_m}{(x - x^*)}$$

$$f(x) = (x - x^*)(b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}) + b_m$$

بالمقارنة بين المعادلتين الاولى والاخيرة نحصل على

$$a_0 = b_0$$

$$b_k = a_k - x^*b_{k-1}, k = 1,2, \dots, m$$

ويمكن كتابتها كما يلي

$$a_0 = b_0$$

$$b_k = a_k + x^*b_{k-1}, k = 1,2, \dots, m$$

وان قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة x^* تساوي b_m اي ان $f(x^*) = b_m$

نفرض ان

$$g(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x^*)g(x) + b_m$$

$$f'(x) = (x - x^*)g'(x) + g(x)$$

$$f'(x^*) = g(x^*)$$

بنفس الاسلوب نحصل على

$$c_0 = b_0$$

$$c_k = b_k + x^*c_{k-1}, k = 1,2, \dots, m - 1$$

وان قيمة الدالة $g(x)$ عند النقطة x^* تساوي c_{m-1} اي ان $g(x^*) = c_{m-1}$ (كيف \ واجب)

اي ان

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_m}{c_{m-1}} =$$

صيغة نيوتن – رافسون لمتعددة الحدود.

يمكن تلخيص الطريقة بالخوارزمية الاتية:-

1- نفرض ان x_0 هي نقطة البداية
2- نحسب $c_0 = b_0 = a_0$ ومن ثم نحسب $b_k = a_k + x^* b_{k-1}, k = 1,2,\ldots,m$ وايضا $c_k = b_k + x^* c_{k-1}, k = 1,2,\ldots,m-1$
3- نحسب $x_{n+1} = x_n - \frac{b_m}{c_{m-1}}$
4- نكرر الخطوات 2 و 3 حتى نحصل على قيمة تقريبية لجذر المعادلة

a_i	a_0	a_1	a_2	…	a_{m-1}	a_m
$x_0 b_{i-1}$		$x_0 b_0$	$x_0 b_1$	…	$x_0 b_{m-2}$	$x_0 b_{m-1}$
b_i	b_0	b_1	b_2	…	b_{m-1}	b_m
$x_0 c_{i-1}$		$x_0 c_0$	$x_0 c_1$	…	$x_0 c_{m-2}$	
	c_0	c_1	c_2	…	c_{m-1}	

مثال:- باستخدام طريقة القسمة التركيبية جد جذر المعادلة $x^3 - x^2 + 2x + 5 = 0$ علما ان $x_0 = -1$

الحل:-

a_i	1	-1	2	5
$x_0 = -1$		-1	2	-4
b_i	1	-2	4	1
$x_0 = -1$		-1	3	
	1	-3	7	

$$\therefore\ x_1 = x_0 - \frac{b_m}{c_{m-1}} = -1 - \frac{1}{7} = -1.14286$$

a_i	1	-1	2	5
$x_0 = -1.14286$		-1.14286	2.44899	-5.08457
b_i	1	-2.14286	4.44899	-0.08457
$x_0 = -1.14286$		-1.14285	3.75511	-0.0103
	1	-3.28571	8.2041	

$$\therefore\ x_2 = x_1 - \frac{b_m}{c_{m-1}} = -1.14285 + 0.0103 = -1.13515$$

حل منظومة المعادلات غير الخطية:-

Solution for system of non-linear equation

سوف نتطرق في هذا الموضوع على حل منظومة مكونة من معادلتين لمتغييرين فقط.

لتكن $f(x,y)=0, g(x,y)=0$ معادلتين والحل المضبوط لهما هو (x,y) ولتكن (x_0,y_0) الحل التقريبي الاولي.

1-<u>الطريقة التكرارية</u>:- The iterative method

علينا تحويل المعادلتين الى الصيغتين $x=F(x,y)$ و $y=G(x,y)$ ولاختبار الصيغتين يجب ان يتحقق الشرط التالي:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|<1\ \&\ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|<1$$

بعد اختبار الصيغتين فان القانون العام للطريقة التكرارية هي:

$$x_{i+1}=F(x_i,y_i)$$

$$y_{i+1}=G(x_i,y_i),\quad i=0,1,\ldots$$

وشرط التوقف يكون

$$|x_{i+1}-x_i|<\epsilon \ \text{or}\ |y_{i+1}-y_i|<\epsilon$$

<u>مثال</u>:- جد حل لمنظومة المعادلات $f(x,y)=x^2+y^2-25=0$ و $g(x,y)=x^2-y^2-7=0$ عند القيمة $[3,4]$ و لثلاث تكرارات

<u>الحل</u>:-

$$x^2+y^2-25=0\Rightarrow y=\sqrt{25-x^2}=G(x,y)$$

$$x^2-y^2-7=0\Rightarrow x=\sqrt{y^2+7}=F(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\,,\frac{\partial G}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+7}}\,,\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|=0+\frac{3}{4}<1$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| = \frac{4}{\sqrt{23}} + 0 < 1$$

∴ الصيغة صحيحة وذلك لتحقق الشرطين

∴ الصيغة العامة للمسالة هي:

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i^2 + 7} \qquad\qquad y_{i+1} = \sqrt{25 - x_i^2}$$

$$x_1 = \sqrt{y_0^2 + 7} = \sqrt{23} = 4.796 \qquad\qquad y_1 = \sqrt{25 - x_0^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_2 = \sqrt{y_1^2 + 7} = 4.796 \qquad\qquad y_2 = \sqrt{25 - x_1^2} = \sqrt{16} = 1.414$$

$$x_3 = \sqrt{y_2^2 + 7} = 3.0 \qquad\qquad y_3 = \sqrt{25 - x_2^2} = \sqrt{16} = 1.414$$

2-<u>الصيغة التعجيلية (المطورة)</u>:- The modify formula

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = G(x_{i+1}, y_i), \quad i = 0,1, \dots$$

في المثال السابق

$$F(x, y) = \sqrt{y^2 + 7}$$

$$G(x, y) = \sqrt{25 - x^2}$$

فان الصيغة العامة باستخدامالصيغة المطورة هي:

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i) \qquad\qquad y_{i+1} = G(x_{i+1}, y_i)$$

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i^2 + 7} \qquad\qquad y_{i+1} = \sqrt{25 - x_{i+1}^2}$$

$$x_1 = 4.796 \qquad\qquad y_1 = 1.414$$

$$x_2 = 3 \qquad\qquad y_2 = 4$$

$$x_3 = 4.796 \qquad\qquad y_3 = 1.414$$