$$f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+3x+3\Delta x-2-(x^2+3x-2)$$
$$= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+3x+3\Delta x-2-x^2-3x+2$$
$$= 2x\Delta x+(\Delta x)^2+3\Delta x$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x+3)}{\Delta x}$$
$$= 2x+\Delta x+3$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+3)=2x+0+3$$
$$= 2x+3$$

لذلك، فأن هذه الدالة قابلة الأشتقاق في $\mathbb{R}$.

قيمة المشتقة عندما $x=3$ ، هي

$$f'(3)=2(3)+3=6+3=9.$$

ملاحظة: يرمز، في بعض الأحيان، لقيمة المشتقة للدالة $f(x)$ في $x=\mathrm{a}$ بالرمز $f'(x)|_{x=\mathrm{a}}$

مثال: لتكن $f(x)=\mathrm{a}x+\mathrm{b}$ ، حيث أن b, a ثابتان (أي $\mathrm{a}, \mathrm{b}\in\mathbb{R}$). جد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)=\mathrm{a}\,(x+\Delta x)+\mathrm{b}=\mathrm{a}\,x+\mathrm{a}\,\Delta x+\mathrm{b}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\mathrm{a}\,x+\mathrm{a}\,\Delta x+\mathrm{b}-(\mathrm{a}x+\mathrm{b})=\mathrm{a}\,\Delta x$$

لذلك، فأن

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{a}\,\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{a}=\mathrm{a}.$$

مثال: لتكن $f(x)=\sqrt{x}$، حيث $x\geq 0$. جد $f'(x)$ عندما $x>0$.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

ولأجل حساب هذه الغاية نضرب البسط والمقام في مرافق البسط، الذي هو $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\Delta x} - x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x+0} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بشرط $x > 0$. لاحظ أن المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$.

مثال: جد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ وبين أنه لا توجد مشتقة عندما $x = 2$.

الحل:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x - 2} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x-2) - (x+\Delta x - 2)}{(x+\Delta x - 2)(x-2)}$$

$$= \frac{x - 2 - x - \Delta x + 2}{(x+\Delta x - 2)(x-2)} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x - 2)(x-2)}$$

وهكذا، يكون

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x - 2)(x-2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot (x+\Delta x - 2)(x-2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x - 2)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

واضح أن $f'(x)$ موجودة لكل قيم x الحقيقية ما عدا $x = 2$.

مبرهنة: أذا كانت f دالة قابلة الأشتقاق في a ، فأن f مستمرة في a .

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث أن

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3 & , \quad x\geq 2\\ 4x-1 & , \quad x<2\end{cases}$$

1) هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=2$ ؟

2) هل الدالة مستمرة عند $x=2$ ؟

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{f'(2)}&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(2+\Delta x)^2+3-((2)^2+3)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2+3-4-3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(4+\Delta x)=4\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{f'(2)}&=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{4(2+\Delta x)-1-(4(2)-1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{8+4\Delta x-1-8+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(4)=4\end{aligned}}$$

بما ان الغاية اليمنى تساوي الغاية اليسرى عندما $\Delta x\to 0$. وعليه، فأن هذه الغاية موجودة، أي أن $f'(2)$ موجودة. وهذا يثبت أن الدالة قابلة للأشتقاق عند $x=2$. وحسب المبرهنة السابقة فأن الدالة مستمرة أيضاً عند $x=2$.

المثال الاتي يبين أن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح دائماً، أي قد تكون الدالة f مستمرة في العدد a ولكن مشتقتها في a غير موجودة.

مثال: تأمل دالة القيمة المطلقة $f(x)=|x|$. هذه الدالة مستمرة في $x=0$ وقيمتها تساوي صفراً، ولكن مشتقتها عند هذه النقطة غير موجودة، كما مبين في الاتي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}$$

لذلك، فأن

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad , \quad \Delta x > 0 \\ \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad , \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

فأذا كانت $\Delta x > 0$ ، فأن $f'(0) = 1$ ، وأذا كانت $\Delta x < 0$ ، فأن $f'(0) = -1$. لذلك فأن الغاية اليمنى لا تساوي الغاية اليسرى عندما $\Delta x \to 0$. وعليه، فأن هذه الغاية غير موجودة، أي أن المشتقة $f'(0)$ ، غير موجودة.

مثال: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث أن $f(x) = |x - 3|$

1) برهن أن الدالة مستمرة عند $x = 3$.

2) هل الدالة قابلة للأشتقاق عند $x = 3$ ؟

مثال: جد قيم a , b اذا كانت الدالة f قابلة للأشتقاق عند $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 \quad , \quad x \geq 1 \\ \mathrm{a}x + \mathrm{b} \quad , \quad x < 1 \end{cases}$$

بعض قوانين الأشتقاق

يطلق على عملية أيجاد مشتقة دالة ما التفاضل differentiation ، ولكن عملية التفاضل هذه مطولة ومملة وخاصة عندما تكون الدالة معقدة. لذلك وجب وضع قواعد وقوانين تسهل أجراء عملية التفاضل.

مبرهنة: أذا كان $f(x) = \mathrm{c}$ لكل x ، حيث c ثابت حقيقي، فأن $f'(x) = 0$. أي مشتقة الثابت تساوي صفراً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 7$ ، فأن $f'(x) = 0$ وأذا كانت $f(x) = -5$ ، فأن $f'(x) = 0$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ ، فأن $f'(x) = \mathrm{n}\, x^{\mathrm{n}-1}$.

مثال: اذا كانت $f(x) = x^3$ ، فأن $f'(x) = 3x^2$ وأذا كانت $f(x) = x^5$ ، فأن $f'(x) = 5x^4$

مبرهنة: أذا كان c ثابتاً وكانت f دالة قابلة الأشتقاق، فأن $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c} \cdot f(x)] = \mathrm{c}\, f'(x)$.

مثال: اذا كانت $f(x) = 3x^6$ ، فأن $f'(x) = 3(6)\, x^5 = 18\, x^5$

مبرهنة: لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{d}{dx}[\, f(x) \pm g(x)\,] = f'(x) \pm g'(x)$$

ويمكن أن نكتب قاعدة الاشتقاق المتضمنة في هذه المبرهنة كالاتي:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

أذا كانت

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots a_1\, x + a_0$$

متعددة حدود، فأن

$$f'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + (n-2)\, a_{n-2}\, x^{n-3} + \cdots + a_1$$

مثال: أذا كانت $f(x) = 5x^7 - 2x^6 + 3x^2 - 2x - 4$ ، فأن

$$f'(x) = 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{d}{dx}[\, f(x) \cdot g(x)\,] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

or

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

مثال: أذا كانت $f(x) = (3x-2) \cdot (4x+1)$ ، فأن

$$f'(x) = (3x-2) \cdot (4) + (4x+1) \cdot (3) = 12x - 8 + 12x + 3$$
$$= 24x - 5$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، وأن $g(x) \neq 0$ ، فأن

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = \frac{8\, x^7}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot (56\, x^6) - (8\, x^7) \cdot (2)}{(2x-1)^2} = \frac{112\, x^7 - 56\, x^6 - 16\, x^7}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{96\, x^7 - 56\, x^6}{(2x-1)^2}.$$

مثال: لتكن

$f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-9}\ ,\ x \neq 9$

فأن

$$f'(x) = \frac{(x-9)\cdot(2\,x-2)-(x^2-2x+5)\cdot(1)}{(x-9)^2}$$
$$= \frac{2\,x^2+18-18\,x-2x-x^2+2x-5}{(2x-1)^2} = \frac{x^2-18\,x+13}{(2x-1)^2}$$

مثال: لتكن $g(t) = \frac{t^2}{t^2-4}$ ، أوجد قيمة $\frac{dg}{dt}$ عندما $t = 0$ ، $t = 1$.

الحل:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{(t^2-4)\cdot(2\,t)-(t^2)\cdot(2\,t)}{(t^2-4)^2} = \frac{2\,t^3-8\,t-2\,t^3}{(t^2-4)^2} = \frac{-8\,t}{(t^2-4)^2}$$

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \qquad , \qquad \frac{dg}{dt}\Big|_{t=1} = \frac{-8}{9}$$

مثال: لتكن $y = f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$y' = \frac{df}{dx} = \frac{(2x-1)\cdot(0)-(1)\cdot(2)}{(2x-1)^2} = \frac{0-2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{-n}$ ، فأن $f'(x) = -n\,x^{-n-1}$

مثال: أذا كانت $f(x) = x^5 - 3x^{-2} + 2x^{-3} + 1$ ، فأن

$$f'(x) = 5x^4 - 3(-2)x^{-2-1} + 2(-3)x^{-3-1} + 0 = 5x^4 + 6\,x^{-3} - 6\,x^{-4}$$

يمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل الحالات التي يكون فيها الأس عدداً نسبياً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 5\,\sqrt[3]{x}$ ، أي أن $f(x) = 5\,(x)^{\frac{1}{3}}$ ، فأن

$$f'(x) = 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}\,(x)^{\frac{-2}{3}} = \frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

مبرهنة: أذا كانت $y = [\,f(x)\,]^n$ ، حيث أن n عدد صحيح وأن $f(x)$ دالة قابلة للأشتقاق، فأن

$$\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

مثال: لتكن $y = 2\,(3\,x^2+5)^4 - 3\,(x^2+3x-2)^{-5}$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(4)(3\,x^2+5)^3 \cdot (6\,x) - 3(-5)(x^2+3x-2)^{-6} \cdot (2\,x+3)$$

$$= 48\,x\,(3\,x^2+5)^3 + 15\,(x^2+3x-2)^{-6} \cdot (2\,x+3)$$

مثال: لتكن $y = 4\,(2\,x^2+3\,x-2)^2$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,(2)(2\,x^2+3\,x-2)^{2-1} \cdot (4\,x+3)$$
$$= 8\,(2\,x^2+3\,x-2) \cdot (4\,x+3)$$

قاعدة السلسلة The Chain Rule

أولاً: الدالة المركبة : $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

لتكن $y = f(u)$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى u ، ولتكن $u = g(x)$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x فأن :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

مثال: أذا كانت $u = x + 3 \quad , \quad y = u^2 + 5u - 1$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+5) \cdot (1) = 2\,u + 5$$

بما أن $u = x + 3$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = 2\,u + 5 = 2(x+3) + 5 = 2x + 6 + 5 = 2x + 11$$

مثال: أذا كانت $u = 5x^2 \quad , \quad y = u^3 + 2u + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x)$$

بما أن $u = 5x^2$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = (3\,u^2+2) \cdot (10\,x) = (3\,(5x^2)^2 + 2) \cdot (10\,x)$$
$$= (75\,x^4 + 2) \cdot (10\,x) = (75x^4 + 2) \cdot (10\,x) = 750\,x^5 + 20\,x$$

مثال: أفرض أن $y = 3\,u^2 + 5$ و $u = 4x + 3$. جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: $\frac{du}{dx} = 4 \quad , \quad \frac{dy}{du} = 6\,u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 6\,u \times 4 = 24u$$

بما أن $u = 4x + 3$ ، فان:

$$\frac{dy}{dx} = 24u = 24(4x + 3) = 96x + 72$$

ويمكن حل المثال بطريقة أخرى وذلك بالتعويض عن u في y وكالاتي:

$$y = 3\,u^2 + 5 = 3\,(4x + 3)^2 + 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6(4x + 3)(4) = 96x + 72$$

مثال: أذا كان $y = u^2 + 3u + 2$ و $u = 2x + 1$. جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

الحل: $\frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad \frac{dy}{du} = 2u + 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (2u + 3) \times 2 = 4u + 6$$

بالتعويض عن $u = 2x + 1$ ، فأن:

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) + 6 = 8x + 4 + 6 = 8x + 10$$

عندما $x = 2$ ، فأن:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2) + 10 = 16 + 10 = 26$$

مثال: أذا كانت $u = \frac{1}{x+1}$, $y = 4u^2 + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: أذا كانت $u = 4\,x^2 - 2\,x + 5$, $y = u^3$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

ثانياً: لتكن $y = f(t)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى t ، ولتكن $x = g(t)$ أيضاً دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى t فأن:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

مثال: أفرض أن $x = 3\,t - 4$ و $y = 2t + 5$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{dt} = 2 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2}{3}$$