مثال: أحسب قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}=\frac{A_1\,x+A_2}{x^2+2}+\frac{A_3\,x+A_4}{(x^2+2)^2}$$

نجد أن: $A_1=-1\ ,\ A_2=1\ ,\ A_3=1\ ,\ A_4=0$.

$$\int_0^1\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx=\int_0^1\frac{A_1\,x+A_2}{x^2+2}dx+\int_0^1\frac{A_3\,x+A_4}{(x^2+2)^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{-x+1}{x^2+2}dx+\int_0^1\frac{x}{(x^2+2)^2}dx=\int_0^1\frac{-x}{x^2+2}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+2}dx+\int_0^1 x(x^2+2)^{-2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{-2\,x}{x^2+2}dx+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+2)^{-2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{-2+1}}{-2+1}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}-\tan^{-1}0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{12}$$

مثال: أحسب قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1}\,dx$

الحل: باستخدام القسمة المطولة نجد أن:

$$\begin{array}{r|lllll} & x & & & & \\ \hline x^3+1 & x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +1 \\ - & x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +x & \\ \hline & & & & -x & +1 \end{array}$$

Therefore, $\frac{x^4+1}{x^3+1}=x+\frac{1-x}{x^3+1}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1-x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1-x}{x^3+1} = \frac{1-x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\mathrm{A}_1}{(x+1)} + \frac{\mathrm{A}_2\,x + \mathrm{A}_3}{(x^2-x+1)}$$

بعد إجراء الحسابات نحصل على قيم للثوابت:

$$\mathrm{A}_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad \mathrm{A}_2 = \frac{-2}{3} \quad , \quad \mathrm{A}_3 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1-x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\frac{2}{3}}{(x+1)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\frac{-2}{3}\,x + \frac{1}{3}}{(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2\,x-1}{(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{2}{3}\ln(x+1)\bigg|_0^1 - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1)\bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{3}(\ln 1 - \ln 1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\ln 2$$

مثال: أحسب قيمة التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^4+x^2}$

الحل:

$$\frac{1}{9x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(9x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{A}_3\,x + \mathrm{A}_4}{9x^2+1}$$

$$1 = \mathrm{A}_1\,x\,(9x^2+1) + \mathrm{A}_2\,(9x^2+1) + (\mathrm{A}_3\,x + \mathrm{A}_4)x^2$$

عوض عن $x = 0$ ، فأن: $\mathrm{A}_2 = 1$.

ومن تساوي معاملات x^2 في الطرفين نحصل على:

$$0 = 9\,\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_4 \Longrightarrow \mathrm{A}_4 = -9$$

ومن تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على:

$$0 = \mathrm{A}_1$$

ومن تساوي معاملات x^3 في الطرفين نحصل على:

$$0 = 9\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3 \Longrightarrow \mathrm{A}_3 = 0$$

وبذلك يكون التكامل على الشكل الاتي:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^4+x^2} = \int \left(\frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{A}_3\,x + \mathrm{A}_4}{9x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0-9}{9x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-9}{9x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{1}{9x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{-2}\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{1}{(3\,x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x - \frac{9}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{(3\,x)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{x} - 3\tan^{-1}(3\,x) + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب قيمة التكامل $\int \frac{dx}{x^3-1}$

الحل:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+x+1}$$

$$1=A_1(x^2+x+1)+(A_2x+A_3)(x-1)$$

نفرض $x=1$ ، فان: $A_1=\frac{1}{3}$. ومن تساوي معاملات x^2 في الطرفين نحصل على:

$$0=A_1+A_2 \Rightarrow \frac{1}{3}+A_2=0 \Rightarrow A_2=\frac{-1}{3}$$

ومن تساوي معاملات x في الطرفين نحصل على:

$$0=A_1-A_2+A_3 \Rightarrow \frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{3}\right)+A_3=0 \Rightarrow \frac{2}{3}+A_3=0 \Rightarrow A_3=\frac{-2}{3}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^3-1}=\int\left(\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{\frac{-1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{6}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

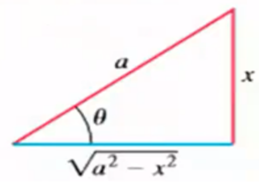
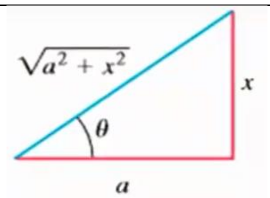
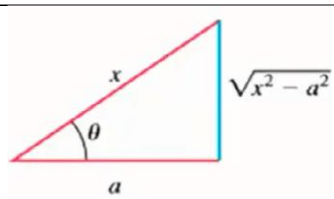
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

مثال: جد ناتج التكاملات الاتية:

$$\int\frac{x^4+2x^2+3}{x^3+4x}dx \quad , \quad \int\frac{dx}{x(x^2+x+1)} \quad , \quad \int\frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}dx$$

$$\int\frac{2x^6-4x^5+5x^4-3x^3+x^2+3x}{(x-1)^3(x^2+1)^2}dx \; , \; \int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx \; , \; \int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

ممن الممكن أحياناً تحويل الدالة المراد تكاملها الى دالة أخرى مثلثية يمكن تكاملها ويسمى هذا التكامل بالتعويضات المثلثية. وتستعمل هذه الطريقة أذا أحتوى التكامل على $\sqrt{a^2-x^2}$ أو $\sqrt{a^2+x^2}$ أو $\sqrt{x^2-a^2}$. ولإيجاد التكامل نستعمل تعويضات كما موضحة في الجدول:

المقدار	التعويض	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	

مثال: أحسب $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

الحل:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3^2}}$$

الفرضية: نفرض أن $x=a\tan\theta=3\tan\theta$

نفاضل الفرضية بالنسبة لــ θ :

$$dx=3\sec^2\theta\ d\theta$$

نعوض الفرضية ومشتقتها في التكامل:

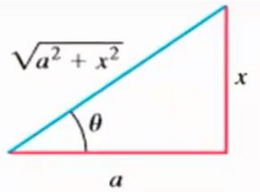
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int \frac{3\sec^2\theta\ d\theta}{9\tan^2\theta\ \sqrt{9\tan^2\theta+9}}=\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{3\tan^2\theta\ \sqrt{9(\tan^2\theta+1)}}$$

$$=\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{3\tan^2\theta\ \sqrt{9\sec^2\theta}}=\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{9\tan^2\theta\ \sec\theta}=\frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta\ d\theta}{\tan^2\theta}=\frac{1}{9}\int \frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{9}\int \frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}d\theta=\frac{1}{9}\int \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{9}\int \cos\theta\ (\sin\theta)^{-2}\,d\theta$$

$$\frac{1}{9}\frac{(\sin\theta)^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{-1}{9\sin\theta}+C$$

نكتب المسألة (الحل) بدلالة x ، أي نعوض عن $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ ، لاحظ الشكل:



فنحصل على:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\frac{-1}{9\sin\theta}+C=\frac{-1}{9\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}+C=\frac{-\sqrt{9+x^2}}{9\,x}+C$$

مثال: أحسب $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

الحل: الفرضية: نفرض أن $x=a\sin\theta=2\sin\theta$

نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ : $dx=2\cos\theta\ d\theta$

نعوض الفرضية ومشتقتها في التكامل:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{2\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}=\int\frac{2\cos\theta\ d\theta}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta\ d\theta}{\cos\theta}$$

$$=\int d\theta=\theta+C$$

نكتب الحل بدلالة x ، حيث أن $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

مثال: أحسب $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

الحل: الفرضية: نفرض أن $x=a\sec\theta=3\sec\theta$

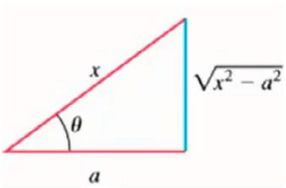
نفاضل الفرضية بالنسبة لـــ θ : $dx=3\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

نعوض الفرضية ومشتقتها في التكامل:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{3\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}=\int\frac{3\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{3\sqrt{\sec^2\theta-1}}=\int\frac{\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta}}$$

$$=\int\frac{\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{\tan\theta}=\int\sec\theta\ d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

نكتب الحل بدلالة x ، حيث أن $\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$ و $\sec\theta=\frac{x}{3}$ ، لاحظ الشكل:



$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|+C$$

مثال: أحسب $\int \frac{16}{x^2\sqrt{4-9x^2}}\,\mathrm{d}x$

الحل: نجعل معامل x^2 داخل الجذر يساوي 1.

$$\int \frac{16}{x^2\sqrt{4-9x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{16}{x^2\sqrt{\frac{9\times 4}{9}-9x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{16}{3\cdot x^2\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}\mathrm{d}x$$

نفرض أن $x = \mathrm{a}\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$ ، وبتفاضل الطرفين نحصل على:

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$$

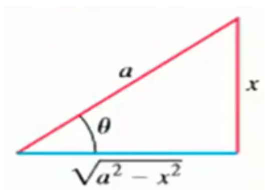
نعوض الفرضية ومشتقتها في التكامل:

$$\int \frac{16}{3\cdot x^2\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{16}{3}\int \frac{\frac{2}{3}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\frac{4}{9}\sin^2\theta\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\sin^2\theta}} = 8\int \frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\sin^2\theta}}$$

$$= 8\int \frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}} = 12\int \frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta}} = 12\int \frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\cos\theta} = 12\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 12\int \csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -12\cot\theta + \mathrm{C}$$

نكتب الحل بدلالة x ، حيث أن $\cot\theta = \frac{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}$ ، لاحظ الشكل:



$$\therefore \int \frac{16}{x^2\sqrt{4-9x^2}}\mathrm{d}x = \frac{-12\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}{x} + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب $\int \sqrt{9-4x^2}\ \mathrm{d}x$

الحل: نجعل معامل x^2 داخل الجذر يساوي 1.

$$\int \sqrt{\frac{9\times 4}{4}-4x^2}\ \mathrm{d}x = 2\int \sqrt{\frac{9}{4}-x^2}\ \mathrm{d}x$$

نفرض أن $x = \mathrm{a}\sin\theta = \frac{3}{2}\sin\theta$ ، وبتفاضل الطرفين نحصل على:

$$\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\ \ 2\int \sqrt{\frac{9}{4}-x^2}\ \mathrm{d}x = 2\int \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\sin^2\theta}\ \ \frac{3}{2}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta = 2\frac{3}{2}\frac{3}{2}\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\ \ \cos\theta\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int \cos\theta\cos\theta\ d\theta = \frac{9}{2}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$= \frac{9}{4}\left(\int d\theta + \int \cos(2\theta)\, d\theta\right) = \frac{9}{4}\left(\int d\theta + \frac{1}{2}\int 2\cos(2\theta)\, d\theta\right)$$

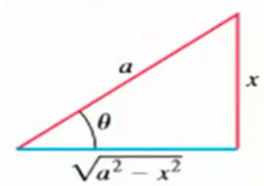
$$= \frac{9}{4}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C = \frac{9}{4}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

نكتب الحل بدلالة x ، حيث أن

$$x = \frac{3}{2}\sin\theta \Longrightarrow \frac{2}{3}x = \sin\theta \Longrightarrow \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) = \theta$$

وأن

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{x}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{9}\, x\, \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$$



$$\int \sqrt{9-4x^2}\ dx = \frac{9}{4}\left(\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{\frac{8}{9}\, x\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + x\sqrt{\frac{9}{4} - x^2 + C}$$

الواجب:

المسألة	الفرضية	الحل
$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}$	$x = 5\sec\theta$	$\frac{1}{250}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{50}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2} + C$
$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$	$x = \sin\theta$	$\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} - \sin^{-1}(x) + C$
$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$	$x = \tan\theta$	$\frac{-\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln\left\lvert\sqrt{1+x^2} + x\right\rvert + C$
$\int \sqrt{1+4x^2}\, dx$	$x = \frac{1}{2}\tan\theta$	$\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left\lvert\sqrt{1+4x^2} + 2x\right\rvert + C$
$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx$	$x = 2\sec\theta$	$\ln\left\lvert\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right\rvert - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$x = 2\tan\theta$	$\ln\left\lvert\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right\rvert + C$

الدوال متعددة المتغيرات Functions of Several Variables

توجد الكثير من الكميات التي تَعتمد في قيمتها على كمية أو كميات أخرى مثل تلك الكميات تسمى متغيرات معتمدة (أو متغيرات تابعة) dependent variables ، بينما الكميات التي تُعتمد عليها تسمى متغيرات مستقلة independent variables .

تسمى الدالة بمتغير واحد اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها واحد.

تسمى الدالة بمتغيرين اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها أثنين.

تسمى الدالة بثلاث متغيرات اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها ثلاثة.

.... وهكذا ....

تسمى الدالة بــ n من المتغيرات اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها n .

الدوال ذات المتغير المستقل الواحد مثل: $y = f(x)$

مثال: مساحة المربع A كمية تعتمد على طول ضلعه x . وحيث أن لكل قيمة لــ x توجد قيمة وحيدة لــ A ، لذلك فأن A دالة متغيرها المستقل x ونعبر عن ذلك بالشكل:

$$A = f(x) = x^2$$

مثال: مساحة الدائرة A هي متغير تابع (دالة) في المتغير المستقل r (نصف قطر الدائرة).

$$A = f(r) = \pi r^2$$

الدوال ذات متغيرين مستقلين مثل: $z = f(x, y)$

مثال: مساحة المستطيل A هي دالة بمتغيرين مستقلين x و y (بعدي المستطيل). حيث

$$A = f(x, y) = x\, y$$

أي أن A متغير معتمد (تابع) وحيد القيمة في المتغيرين المستقلين x و y .

مثال: حجم الغاز v يتناسب طردياً مع درجة حرارته المطلقة t وعكسياً مع ضغطه p .

أي أن v دالة في المتغيرين المستقلين t و p :

$$v = k\,\frac{t}{p} \quad ; \quad k \text{ is constant.}$$

الدوال ذات ثلاث متغيرات مستقلة مثل: $u = f(x, y, z)$

دوال ذات ثلاث متغيرات مستقلة x, y, z . مجال هذه الدوال هو مجموعة الاعداد المرتبة ثلاثياً (x, y, z) والتي هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$. ويرمز لقيم f بالرمز $f(x, y, z)$ التي تقرن العدد المرتب ثلاثياً (x, y, z) بعدد وحيد u.