$$\therefore P_\circ = \begin{cases} if\ \dfrac{\rho}{C} \neq 1\ \ Use\ The\ Law \Rightarrow \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^C}{C!} * \frac{1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C+1}}{\left(1-\frac{\rho}{C}\right)}\right)\right]^{-1} \\ if\ \dfrac{\rho}{C} = 1\ \ Use\ The\ Law \Rightarrow \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^C}{C!} * (N-C+1)\right)\right]^{-1} \end{cases} \quad \cdots\cdots (4.2)$$

ملاحظة عندما (N) تقترب من الـ (∞) فإن المعادلتين أعلاه تنتقل الى المعادلتين رقم $(P_\circ)$ و (P_n) للنموذج الثالث وذلك بشرط أن $\frac{\rho}{C} < 1$ وكذلك عندما $C = 1$ فإن النموذج $(M/M/C/N)$ يتحول الى النموذج الثاني $(M/M/1/N)$.

بعض مؤشرات نموذج الانتظار $(M/M/C):(GD/N/\infty)$:

1- توقع عدد الوحدات في صف الانتظار (Lq):

$$Lq = \frac{\rho^C\left(\frac{\rho}{C}\right)}{C!\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^2} P_\circ \left[1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C+1} - \left(1-\frac{\rho}{C}\right)(N-C+1)\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C}\right]$$

<u>*Proof*</u>:

$$Lq = E(n-C) = \sum_{n=c}^{N}(n-C)P_n = \frac{P_\circ}{C!}\sum_{n=c}^{N}\frac{(n-C)\,\rho^n}{C^{n-C}}$$

$Let\ n - C = j \Rightarrow \rho^n = \rho^{n=j+C}$ نعوض

$$Lq = \frac{P_\circ\,\rho^C}{C!}\sum_{j=0}^{N-C} j\left(\frac{\rho}{C}\right)^j = \frac{P_\circ\,\rho^C\left(\frac{\rho}{C}\right)}{C!}\sum_{j=0}^{N-C} j\left(\frac{\rho}{C}\right)^{j-1}$$

$$= \frac{P_\circ\,\rho^C\left(\frac{\rho}{C}\right)}{C!} * \frac{d}{d\frac{\rho}{C}} * \sum_{j=0}^{N-C}\left(\frac{\rho}{C}\right)^j$$ متوالية هندسية منتهية (محدودة)

$$Lq = \frac{P_\circ\,\rho^C\left(\frac{\rho}{C}\right)}{C!} * \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{C}\right)}\left[\frac{1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C+1}}{1-\frac{\rho}{C}}\right]$$

$$\therefore Lq = \frac{\rho^C\left(\frac{\rho}{C}\right)}{C!\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^2} P_\circ \left[1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C+1} - \left(1-\frac{\rho}{C}\right)(N-C+1)\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C}\right]$$

2- توقع عدد الوحدات في النظام (Ls):

$$Ls = Lq + \frac{\lambda_e}{M}$$

$$\lambda_e = \lambda(1-P_N)$$

حيث أن:

(λ_e) تمثل نسبة الوصول المؤثرة و (P_N) احتمال فقدان الوحدة الطالبة للخدمة.

3- توقع وقت الانتظار في الصف (Wq):

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda_e}$$

4- توقع وقت الانتظار في النظام (Ws):

$$Ws = Wq + \frac{1}{M}$$

5- عدد قنوات الخدمة العاطلة $(\overline{C})$:

$$\overline{C} = C - \rho(1 - P_N)$$

مثال: يقوم أحد المصارف بتقديم خدماته الى العملاء عن طريق الدخول بسياراتهم الى المصرف وانهاء معاملاتهم أمام أُمناء الصناديق بدون الحاجة الى النزول من السيارة وقد وُجِدَ أن هذا المصرف يحتوي على (4) أُمناء صناديق (قنوات خدمة) ويصل الزبائن الى المصرف بمعدل (45) زبون في الساعة طبقاً لتوزيع بواسون وأن الساحة المخصصة لوقوف السيارات داخل المصرف لا تتسع لأكثر من (10) سيارات في الساعة وأن زمن خدمة الزبون الواحد يتبع التوزيع الأُسي بمعدل (4) دقائق لكل زبون. حدد نوع النظام المُلائم لهذا النموذج مع حساب ما يلي:

1- احتمال أن يكون المصرف خالي من الزبائن.
2- احتمال وجود زبون واحد أو اثنان أو ستة زبائن في المصرف.
3- احتمال وصول سيارة ولا تجد مجال للدخول.
4- عدد قنوات الخدمة العاطلة عن العمل.
5- عدد قنوات الخدمة العاملة (المشحونة).
6- العدد المتوقع للزبائن في صف الانتظار وفي المصرف.
7- زمن الانتظار المتوقع لكل زبون في صف الانتظار وفي المصرف.

$M = 4\,, N = 10$

$(M/M/4):(GD/10/\infty)$

$M = \frac{1}{4} * 60 = 15$ زبون/ساعة

$\lambda = 45$ زبون/ساعة

$$\rho = \frac{\lambda}{M} \Longrightarrow \frac{45}{15} = 3$$

$$\frac{\rho}{C} = \frac{3}{4} = 0.75 \neq 1$$

$\because \frac{\rho}{C} \neq 1$ *Use The Law of* $P_\circ$

$$1) \quad P_\circ = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^C}{C!} * \frac{1 - \left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C+1}}{\left(1 - \frac{\rho}{C}\right)} \right) \right]^{-1}$$