5) the determinant of the upper and Lower triangular matrix is the product of the main diagonal elements

محدد المصفوفة المثلثية العليا والسفلى هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (30 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 30$$

where $\det(A) = 2 \times 5 \times 3 = 60$

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

6) If the matrix contains two rows or two columns that are identical or equal, then the value of the determinant is Zero

اذا احتوت المصفوفة على صفين او عمودين متطابقان او متساويان فان قيمة المحدد تساوي صفر (اي اذا كان احد الصفين او العمودين بينهما نسبة او تناسب (ضعف او ثلاثة اضعاف او مضروب بعدد ثابت) عندئذ المحدد يساوي صفر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان R_3 مساوٍ لـ R_1

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 12) - (0 + 6 + 12) = \text{Zero}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان R_1 هو ضعف R_3

اي ان $2R_3 = R_1$

اذن المحدد يساوي صفر

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (-12 + 8 + 36) - (-12 + 8 + 36) = \text{zero}$$

7) If we multiply a row by a fixed number and then add it to another row, this does not affect the value of the determinant, and the same is true for columns

اذا ضربنا صف بعدد ثابت ومن ثم اضفناه الى صف اخر فان ذلك لا يؤثر على قيمة المحدد كذلك الحال بالنسبة للاعمدة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 15 - 6 = 9$$

~~ضرب R_1 في الذي يتغير $(R_2 + 2R_1)$~~

(1) $(2R_1 + R_2) \rightarrow$ هذا يعني ان R_2 هو الذي يتغير

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_1) = 33 - 24 = 9$$

(2) $(2C_1 + C_2) \rightarrow$ هذا يعني C_2 هو الذي يتغير

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_2) = 33 - 24 = 9$$

8) If the determinant equals a certain quantity then:

اذا المحدد يساوي كمية معينة فان

$$|A^n| = |A| \cdot |A| \cdot \cdots |A|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -10 + 12 = 2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ -12 & 13 \end{vmatrix} = -104 - (-108) = -104 + 108 = 4$$

ويمكن ان تحسب بالشكل

$$|A^2| = |A| \cdot |A| = (2)(2) = 4$$

وهذه الطريقة اسهل

9) If A and B are square matrices, then

اذا كانت A و B مصفوفتان مربعتان فان

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = 132 - 104 = 28$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10-3 = 7$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6-2 = 4$$

$$\therefore |A| \cdot |B| = 7 \times 4 = 28$$

$$|B| \cdot |A| = 4 \times 7 = 28$$

Ex: Without decomposing the determinant, using the properties of determinants, find the valu of the determinant for the following matrices;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix}$$

نلاحظ ان $R_3 = 2R_1$ لذلك فان المحدد يساوي صفر

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 12 & 5 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان $C_1 = 2C_3$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بما انه المصفوفة مثلثة عليا فان المحدد لها يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$|C| = (2)(-3)(3)(2) = -36$$

Cofactor (العامل المميز ، العامل المرافق)

ويرمز له بالرمز α_{ij} وهو عبارة عن المحدد المحذوف M_{ij} مضروبا بـ $(-1)^{i+j}$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جد العامل المرافق لكل من α_{ij}

$a_{11}, a_{31}, a_{22}, a_{32}$

① $\alpha_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^{(+1)} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$

2) $\alpha_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = +(5-16) = -11$

3) $\alpha_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +(2-16) = -14$

4) $\alpha_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(10-12)$
$= (-1)(-2) = 2$

وعليه فان مصفوفة العوامل المرافقة لـ المصفوفة $A_{3\times3}$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

استخدام الحاصل المرافق في ايجاد لدي معرفة
ملاحظة: هذه الطريقة مطولة ولا تصلح إلا للمصفوفات
ذات السعة الصغير (2x2)، (3x3) اما اذا كانت (4x4)
فان العملية سوف تكون مطولة جدا

يتم ذلك من خلال اختيار صف او عمود في تلك
المصفوفة ومن ثم ايجاد حاصل ضرب عناصر ذلك الصف
او العمود في الحاصل المرافق ومن ثم ايجاد المجموع

Ex: Find the determinant by using defactor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد المحدد باستخدام الطريقة العادية وباستخدام طريقة
الحاصل المرافق

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (4+0+4) - (6+3)$$

$$= 8 - 9 = -1$$

الان نستخدم طريقة الحاصل المرافق
يجب ان نختار صف او عمود واحد نختار الصف او
العمود الذي به اكبر عدد من الاصفار وكذلك تكون
الارقام صغيرة