مثال:- باستخدام طريقة التكرارية جد حل لمنظومة المعادلات $f(x,y) = x + 3logx - y^2 = 0$ و $g(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$ عند القيمة $[3.5,2.5]$ و $\epsilon = 0.002$

الحل:-

$$x + 3logx - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x + 3logx} = G(x,y)$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{xy + 5x - 1} = F(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y+5}{2\sqrt{2}\sqrt{xy+5x-1}}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{2}\sqrt{xy+5x-1}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1+\frac{3}{x}}{2\sqrt{x+3logx}}\,, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| = 0.589 + 0.41 < 1$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| = 0.27 + 0 < 1$$

الصيغة العامة هي:

$$x_{i+1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_i y_i + 5x_i - 1} \qquad y_{i+1} = \sqrt{x_{i+1} + 3logx_{i+1}}$$

$x_1 = 3.553$ $\qquad y_1 = 2.281$

$x_2 = 3.526$ $\qquad y_2 = 2.273$

$x_3 = 3.510$ $\qquad y_3 = 2.268$

$x_4 = 3.501$ $\qquad y_4 = 2.266$

$|y_4 - y_3| = 0.002 = \epsilon$

The solution is (3.501, 2.266)

برهان شرط التقارب $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < 1 \ \& \ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| < 1$

نفرض ان (λ, μ) هو جذر لمنظومة المعادلات $f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$ عندئذ فان

$$\lambda = F(\lambda, \mu)$$
$$\mu = G(\lambda, \mu)$$

باستخدام الصيغة التكرارية نحصل على

$$x_1 = F(x_0, y_0)$$
$$y_1 = G(x_0, y_0)$$

بالطرح نحصل على

$$x_1 - \lambda = F(x_0, y_0) - F(\lambda, \mu)$$
$$y_1 - \mu = G(x_0, y_0) - G(\lambda, \mu)$$

باستخدام سلسلة تايلر على الدالة $F(x_0, y_0)$ و $G(x_0, y_0)$ فان

$$F(x_0, y_0) = F(\lambda, \mu) + (x_0 - \lambda)\frac{\partial F}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$G(x_0, y_0) = G(\lambda, \mu) + (x_0 - \lambda)\frac{\partial G}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial G}{\partial y}$$

بالتعويض نحصل

$$x_1 - \lambda = (x_0 - \lambda)\frac{\partial F}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$y_1 - \mu = (x_0 - \lambda)\frac{\partial G}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial G}{\partial y}$$

$$L = max\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\right\}$$

بالتعويض ايضا نحصل

$$|x_1 - \lambda| + |y_1 - \mu| \le L(|x_0 - \lambda| + |y_0 - \mu|)$$

وبصورة عامة فان

$$|x_{n+1} - \lambda| + |y_{n+1} - \mu| \le L^n(|x_0 - \lambda| + |y_0 - \mu|)$$

فاذا كان ت قيمة L اقل من واحد فان طرف الايمن من الصيغة اعلاه سوف تقترب من الصفر عندئذ فان

$$x_{n+1} \Rightarrow \lambda$$
$$y_{n+1} \Rightarrow \mu$$

وهذا يعني ان شرط التقارب لصيغة التكرارية هي: $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < \mathbf{1}\ \&\ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| < \mathbf{1}$

<u>الفصل الثالث</u>

الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية

Numerical Solution for system linear equations

ان كثير من المسائل في بعض الحالات العلمية وفي التحليل العددي يتطلب حلها معرفة ببعض طرق الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية.

يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من n من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل ومن الدرجة الاولى بالشكل التالي:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

حلها ينقسم الى ثلاث حالات:

1- اذا كانت عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل, فان المنظومة لها حل ولكن ليس حلا وحيدا.
2- اذا كانت عدد المعادلات اكثر من عدد المجاهيل, فان المعادلات قد لايكون لها حل على الاطلاق.
3- اذا كانت عدد المعادلات متساوي عدد المجاهيل, فان المنظومة لها حل وحيد.

ان الحلول العددية لهذا النظام يتكون من نمطين مختلفين:

النمط الاول:- الطرق المباشرة Direct method

النمط الثاني:- الطرق التكرارية Iterative method

الطرق المباشرة Direct method

1- طريقة كَاوس للحذف Gaussian Elimination method

تعتبر من ابسط الطرق المباشرة لحل المنظومة المعادلات الخطية ويمكن توضيحها بما يلي:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$