مثال: أفرض أن $x = 3\,t + 1$ و $y = 5t + 1$. جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: $\frac{dy}{dt} = 5$, $\frac{dx}{dt} = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{5}{3}$$

مثال: أفرض أن $x = 2\,t^2 + 3$ و $y = t^4$. جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = -1$.

الحل: $\frac{dy}{dt} = 4\,t^3$, $\frac{dx}{dt} = 4\,t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4\,t^3}{4\,t} = t^{\mathbf{2}}$$

عندما $t = -1$ فأن: $\frac{dy}{dx} = (-1)^{\mathbf{2}} = 1$

الدوال الضمنية والاشتقاق الضمني Implicit Functions and Implicit Differentiation

اذا كانت y دالة في x أي $y = f(x)$ ، فيقال أن الدالة صريحة ويسمى x بالمتغير المستقل بينما y بالمتغير المعتمد (أو التابع).

قد تصادفنا في بعض الأحيان علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر مثل

$$x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 3y^3x^2 + 6yx - 5x^2 = 10$$

في مثل هذه المعادلات يصعب أو يتعذر التعبير عن أحد المتغيرات بدلالة الأخر مباشرة، وحتى في حالة أيجاد أحد المتغيرين، مثل y ، بدلالة x ، فأن ذلك يؤدي الى أكثر من دالة واحدة. فأذا أخذنا المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ نجد منها $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ ، وهذه علاقة مكونة من دالتين هما $y = -\sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{9 - x^2}$. ولهذا السبب يطلق على هذه العلاقات دوال ضمنية، لكونها تتضمن دالة واحدة على الأقل ولذلك عند أيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية نعتبر y دالة لـــ x ، ونطبق قواعد الأشتقاق المناسبة.

خطوات الاشتقاق الضمني:

1) أشتقاق المعادلة ضمنياً بحيث عند أشتقاق المتغير y نضرب المشتقة بـــ $\frac{dy}{dx}$.
2) نجمع جميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ في الطرف الايسر وباقي الحدود في الطرف الأيمن.
3) نستخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك من الطرف الايسر ونقسم الطرف الأيمن على معاملها.

مثال: ليكن $x^3 + 4\,y^3 - x\,y^2 + 7\,x = 10$. أستعمل الاشتقاق الضمني لحساب $\frac{dy}{dx}$

الحل: نعتبر y دالة للمتغير x ونأخذ المشتقة لكل حد من الحدود بتطبيق القواعد

$$3x^2 + 12\,y^2\frac{dy}{dx} - \left(2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + y^2\right) + 7 = 0$$

ثم نجمع الحدود المحتوية على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ في طرف واحد، وننقل الحدود الأخرى الى الطرف الثاني.

$$(12\,y^2 - 2\,x\,y)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3x^2 - 7$$

اذاً،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2 - 7}{12\,y^2 - 2\,x\,y}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$

الحل:

$$2x - 3y\,y' = 7y' - 1 \Longrightarrow 7y' + 3y\,y' = 2x + 1$$

$$\Longrightarrow (7 + 3y)y' = 2x + 1 \Longrightarrow y' = \frac{2x + 1}{7 + 3y}$$

مثال: ليكن $4\,x^2 + 3\,xy - x\,y^2 = 0$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$8\,x + 3\,x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y - \left(x\left(2\,y\,\frac{dy}{dx}\right) + y^2\right) = 0$$

$$8\,x + 3\,x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y - 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$(3\,x - 2\,x\,y)\,\frac{dy}{dx} = y^2 - 3\,y - 8\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3\,y - 8\,x}{3\,x - 2\,x\,y}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من $2\,y + \sqrt{xy} = 3\,x^3$

الحل:

$$2\,y + (x\,y)^{1/2} = 3\,x^3 \Longrightarrow 2\,y + x^{1/2}\cdot y^{1/2} = 3\,x^3$$

$$2\,\frac{dy}{dx} + x^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,y^{\frac{1}{2}-1}\,\frac{dy}{dx}\right) + y^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}\right) = 9\,x^{3-1}$$

$$2\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot y^{\frac{-1}{2}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{1/2} = 9\,x^2$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot y^{\frac{-1}{2}}\right)\frac{dy}{dx} = 9\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{1/2}}{2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot y^{\frac{-1}{2}}} = \frac{9\,x^2 - \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{9\,x^2 - \frac{\sqrt{y}}{2\,\sqrt{x}}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2\,\sqrt{y}}}$$

مثال: أذا كان $x\,\mathrm{y}=1$. جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$x\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}+\mathrm{y}=0 \Longrightarrow x\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}=\frac{-\mathrm{y}}{x}$$

بما أن $\mathrm{y}=\frac{1}{x}$ ، فأن

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}=\frac{-\mathrm{y}}{x}=\frac{\frac{-1}{x}}{x}=\frac{-1}{x^2}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ لكل مما يأتي:

$$x\,\mathrm{y}^3-3\,x^2=x\,\mathrm{y}+5$$

$$x^2-2\,x\,\mathrm{y}+\mathrm{y}^2=0$$

$$4\,x^2+9\,\mathrm{y}^2-36=0$$

مثال: لتكن $\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{x}=1$. جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{x}=1 \Longrightarrow \mathrm{y}^{-1}+x^{-1}=1$$

$$-\mathrm{y}^{-2}\mathrm{y}'-x^{-2}=0 \Longrightarrow -\mathrm{y}^{-2}\mathrm{y}'=x^{-2} \Longrightarrow \mathrm{y}'=\frac{x^{-2}}{-\mathrm{y}^{-2}}=\frac{-\mathrm{y}^2}{x^2}$$

مثال: لتكن $x\mathrm{y}^3-3x^2=x\mathrm{y}+5$. جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$x(3\mathrm{y}^2\mathrm{y}')+\mathrm{y}^3(1)-6x=x\mathrm{y}'+\mathrm{y}$$

$$x(3\mathrm{y}^2\mathrm{y}')-x\mathrm{y}'=6x+\mathrm{y}-\mathrm{y}^3$$

$$(3x\mathrm{y}^2-x)\mathrm{y}'=6x+\mathrm{y}-\mathrm{y}^3 \Longrightarrow \mathrm{y}'=\frac{6x+\mathrm{y}-\mathrm{y}^3}{3x\mathrm{y}^2-x}$$

مثال: لتكن $x^2-2x\mathrm{y}+\mathrm{y}^2=0$. جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$2x-2(x\mathrm{y}'+\mathrm{y})+2\mathrm{y}\mathrm{y}'=0 \Longrightarrow 2\mathrm{y}\mathrm{y}'-2x\mathrm{y}'=2\mathrm{y}-2x$$

$$\Longrightarrow (2\mathrm{y}-2x)\mathrm{y}'=2\mathrm{y}-2x \Longrightarrow \mathrm{y}'=\frac{2\mathrm{y}-2x}{2\mathrm{y}-2x}=1$$

مثال: لتكن $x^2 = \frac{x+y}{x-y}$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$2x = \frac{(x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2 = (x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2 = x + xy' - y - yy' - x + xy' - y + yy'$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2 = 2xy' - 2y \Rightarrow 2xy' = 2x(x-y)^2 + 2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x(x-y)^2 + y}{x} = (x-y)^2 + \frac{y}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1$

الحل:

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} - \frac{2}{3}\, y^{\frac{-1}{3}}\, y' - y' = 0$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}\, y^{\frac{-1}{3}}\, y' + y' \Rightarrow \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\, y^{\frac{-1}{3}} + 1\right)y' \Rightarrow y' = \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}} + 1}$$

المشتقات ذات الرتب العليا Higher Order Derivatives

المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ مشتقة المشتقة الأولى $f'(x)$. ويرمز عادة للمشتقة الثانية للدالة $y = f(x)$ بأحد الرموز الاتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad f''(x) \quad , \quad y''$$

وبذلك، فأن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وبالمثل، نعرف المشتقة الثالثة (أن وجدت) بأنها مشتقة المشتقة الثانية. وهكذا، بالنسبة للمشتقات من الرتبة الرابعة، الخامسة، ... الخ.

لتكن $y = f(x)$ ولنفرض أن f قابلة للأشتقاق n من المرات في المجال $I \subset \mathbb{R}$ ، فيكون لدينا التعريفات الاتية:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(f'(x))}{dx} = f''(x)$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(f''(x))}{dx} = f'''(x)$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d(f'''(x))}{dx} = f^{(4)}(x)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx} = f^{(n)}(x)$$

مثال: جد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5\,x^3 - 4\,x + 1$

الحل:

المشتقة الاولى $y' = 4\,x^3 + 15\,x^2 - 4$

المشتقة الثانية $y'' = 12\,x^2 + 30\,x$

المشتقة الثالثة $y''' = 24\,x + 30$

مثال: جد y''' للدالة $y = 6x^5$

الحل:

$y' = 30\,x^4 \quad , \quad y'' = 120\,x^3 \quad , \quad y''' = 360\,x^2$

مثال: جد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

$y' = 10\,x^4 + 9\,x^2 + 5 \quad , \quad y'' = 40\,x^3 + 18\,x$

$y''' = 120\,x^2 + 18 \quad , \quad y^{(4)} = 240\,x$

$y^{(5)} = 240 \quad , \quad y^{(6)} = 0$

مثال: أذا كان $x^2\,y + 3y = 4$ جد قيمة y'' في النقطة $(-1, 1)$ الواقعة على منحني الدالة.

الحل: نوجد المشتقة الأولى بالاشتقاق الضمني:

$$x^2\,y' + y\,(2x) + 3\,y' = 0 \;\; \Rightarrow x^2\,y' + 2\,x\,y \; + 3\,y' = 0$$

نوجد المشتقة الثانية

$$x^2\,y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\,y' + y) + 3\,y'' = 0$$

لأيجاد قيمة y'' في النقطة $(-1, 1)$ ، أي عندما $x = -1$, $y = 1$ ، نحتاج أولاً أيجاد قيمة y' في هذه النقطة، وقيمة y' نحصل عليها من العلاقة الأولى وكالاتي:

$$(-1)^2\,y' + 2\,(-1)\cdot\,(1)\; + 3\,y' = 0 \;\; \Rightarrow \; y' + 3\,y' = 2 \Rightarrow 4\,y' = 2$$
$$y' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

والان نعوض هذه القيم في العلاقة الثانية (أي في المشتقة الثانية)

$$x^2\,y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\,y' + y) + 3\,y'' = 0$$

$$(-1)^2\,y'' + \frac{1}{2}\big(2\,(-1)\big) + 2\,\left((-1)\,\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) + 3\,y'' = 0$$
$$y'' - 1 + 1 + 3\,y'' = 0 \;\Rightarrow\; y'' + 3\,y'' = 0 \;\Rightarrow\; 4\,y'' = 0 \Rightarrow y'' = 0$$

مبرهنة رول Rolle's Theorem

لتكن f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة الأشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) فأذا كان $f(a) = f(b)$ ، فأنه يوجد على الاقل عدد واحد c في الفترة المفتوحة (a, b) بحيث أن $f'(c) = 0$.

مثال: لتكن $f(x) = x^3 - 4\,x + 2$ ، فان

$$f'(x) = 3\,x^2 - 4$$

وهي موجودة لكل قيم x الحقيقية، أي أن f قابلة الأشتقاق ومستمرة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن

$$f(-2) = f(2) = f(0) = 2$$

ومن جهة أخرى، نجد أن

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3\,x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

وبموجب مبرهنة رول يجب أن يكون هنالك $c_1 \in (-2,0)$, $c_2 \in (0,2)$ بحيث أن

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

ولما كان $0 < \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$, $-2 < -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$

فأن $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

مثال: بين فيما أذا كانت الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة المبينة إزاء كل منها ؟. اذا كانت كذلك جد قيم c الممكنة.

1) $f(x) = k$, $[a,b]$

2) $f(x) = x$, $[0,1]$

3) $f(x) = (2-x)^2$, $[0,4]$

4) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$, $x \in [-1,1]$

5) $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-3)^2$, $[-3,4]$

6) $f(x) = |x|$, $[-1,1]$

7) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$, $[1,3]$

الحل 1:

$$f(x) = k \quad , \quad [a,b]$$

بما أن الدالة f دالة ثابتة فأنها تكون مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للأشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) وأن $f(a) = f(b) = k$. وبذلك فأن الدالة تحقق شروط مبرهنة رول. وان قيمة c يمكن أن تكون أي قيمة ضمن الفترة (a,b).

الحل 2:

$$f(x) = x \quad , \quad [0,1]$$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الأولى (دالة خطية) وبذلك تكون مستمرة على $[0,1]$ وقابلة للأشتقاق في (a,b). لكن

$$f(0) = 0 \neq f(1) = 1$$

وبذلك فأن هذه الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول.

الحل 3:

$f(x) = (2-x)^2 \quad , \qquad [0,4]$

الدالة متعددة حدود وبذلك تكون مستمرة على الفترة $[0,4]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة $(0,4)$.
ونلاحظ أن

$f(0) = 2^2 = 4 = f(4) = (2-4)^2$

وهكذا فأن الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة. ولأيجاد قيم c نجري الاتي:

$f'(x) = 2(2-x)(-1) = -2(2-x)$
$f'(\mathrm{c}) = -2(2-\mathrm{c}) = 0 \Rightarrow \mathrm{c} = 2 \in (0,4).$

مبرهنة القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-Value Theorem

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\mathrm{a,b}]$ وقابلة الأشتقاق في الفترة المفتوحة $(\mathrm{a,b})$ ، فأنه يوجد على الأقل عدد واحد c في الفترة المفتوحة $(\mathrm{a,b})$ بحيث أن

$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \qquad \text{or} \qquad f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a}) = (\mathrm{b}-\mathrm{a})f'(\mathrm{c})$

مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{2}x^3$. جد كل الأعداد الحقيقية، c ، في الفترة $(-2,2)$ والتي كل منها يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل: نوجد $f'(x) \quad , \quad f(-2) \quad , \quad f(2)$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad , \quad f(-2) = -4 \quad , \quad f(2) = 4$

بما أن الدالة متعددة حدود، فهي مستمرة وقابلة الأشتقاق في $[-2,2]$.

ليكن c أي عدد في الفترة $(-2,2)$ يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة، فأن

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{4-(-4)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

بما أن $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$ ، فأن $f'(\mathrm{c}) = \frac{3}{2}\mathrm{c}^2$. أي أن $\frac{3}{2}\mathrm{c}^2 = \mathrm{c}$. وهكذا، فأن

$$\mathrm{c} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

أي، يوجد عددان $\frac{2}{\sqrt{3}} \; , \; -\frac{2}{\sqrt{3}}$ في الفترة $(-2,2)$ يحققان مبرهنة القيمة المتوسطة.