مثال: حجم متوازي المستطيلات u هو دالة (متغير تابع وحيد القيمة) في ثلاث متغيرات مستقلة هي أبعاد متوازي المستطيلات: الطول x والعرض y والارتفاع z .

$u = f(x, y, z) = x\,y\,z$

الدوال في n من المتغيرات المستقلة مثل: $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

يمكن تعميم التعريف السابق للدالة u في المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وعددها n اذا وجدت قاعدة تقرن بكل عدد مرتب نونياً على الصورة $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ عدد وحيد u . ومجال هذه الدالة يكون مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$.

Example:

If $f(x, y) = xy + 2y$ evaluate $f(3,4)$ and $f(4,3)$.

Solution:

$f(3,4) = 3(4) + 2(4) = 12 + 8 = 20$

$f(4,3) = 4(3) + 2(3) = 12 + 6 = 18$

Example: If $f(x, y) = 5x + xy^2 - 10$ and $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

Evaluate

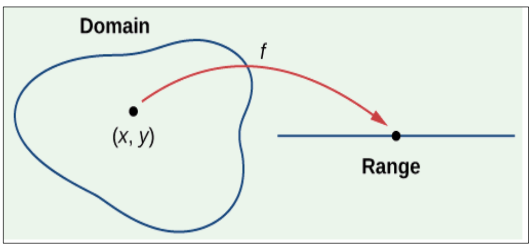
$f(0,0)$, $f(1,2)$, $f(2,1)$, $g(5,6,10)$, $g(0,0,0)$, $g(10,5,6)$

Functions of two variables الدوال في متغيرين

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

تعريف الدالة الحقيقية في متغيرين:

لتكن A مجموعة من الأزواج المرتبة (أي أن $A \subseteq \mathbb{R}^2$). تسمى $f(x, y)$ دالة في متغيرين أذا كانت f تقرن (أي تعين) لكل زوج مرتب (x, y) في A عدد حقيقي واحد فقط $f(x, y)$. تسمى المجموعة A مجال الدالة f ، أي أن $D_f = A$. ومجموعة القيم التي تأخذها الدالة f تسمى مدى الدالة f ، أي أن $R_f = \{f(x, y): (x, y) \in A\}$.



أيجاد المجال:

توجد ثلاث دوال أساسية معروفة المجال وهذه الدوال هي: دوال متعددات الحدود، الدوال الكسرية والدوال الجذرية.

دوال متعددات الحدود (أو كثيرات الحدود): Polynomial Functions

دالة متعددة الحدود في متغيرين مستقلين هي دالة تتكون من حدود، كل حد عبارة عن ثابت حقيقي مضروب في المتغيرين المستقلين. المتغيران المستقلان مرفوعان لأسس صحيحة غير سالبة (الأس موجب أو صفر). هذه الدالة مجالها $\mathbb{R}^2$.

مثال:

$f(x, y) = 2xy + 4y^2$

$f(x, y) = 5x^2 + 7y$

$f(x, y) = x^{10}y + 12x^2y^7 + 3$

$f(x, y) = x^3y + x^2 + x$

كل هذه الدوال متعددات حدود مجالها $\mathbb{R}^2$.

Example: let $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 7$

1. Find the domain and range of f.
2. Compute $f(0,0)$, $f(-1,2)$, $f(3,5)$, $f(0,-1)$

Solution:

1. The function f is polynomial, hence its domain is $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$. To find the range

Since $2x^2 + y^2 \geq 0 \Longrightarrow 2x^2 + y^2 + 7 \geq 7 \Longrightarrow f(x, y) \geq 7$

$R_f = \{f(x, y): f(x, y) \in \mathbb{R}, f(x, y) \geq 7\} = [7, \infty)$.

2. $f(0,0) = 2(0)^2 + (0)^2 + 7 = 7$

$f(-1,2) = 2(-1)^2 + (2)^2 + 7 = 13$

$f(3,5) = 2(3)^2 + (5)^2 + 7 = 50$

$f(0,-1) = 2(0)^2 + (-1)^2 + 7 = 8$.

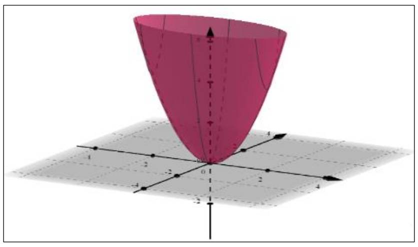
مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x, y) = x^2 + 5y^2$

الحل: واضح أن مجال هذه الدالة هو $\mathbb{R}^2$ لأن الدالة متعددة حدود. وبما أن

$f(x, y) = x^2 + 5y^2 \geq 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

فان مدى هذه الدالة يكون جميع الأعداد الحقيقية غير السالبة . أي أن

$R_f = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{f(x, y) \in \mathbb{R}: f(x, y) \geq 0\}$



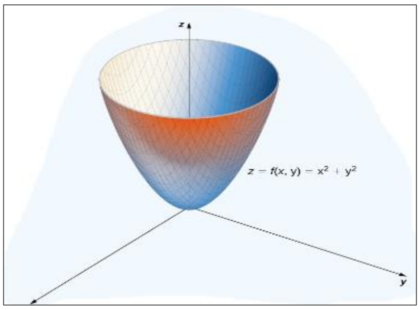
مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x,y) = x^2 + y^2$

الحل: مجال هذه الدالة هو $\mathbb{R}^2$ لأن الدالة متعددة حدود. وبما أن

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 \ , \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

فان مدى هذه الدالة يكون جميع الأعداد الحقيقية غير السالبة . أي أن

$$R_f = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{f(x,y) \in \mathbb{R}: f(x,y) \geq 0\}$$



الدوال الكسرية : هي التي تتكون من بسط ومقام وكلاً من البسط والمقام عبارة عن دوال متعددات حدود. هذه الدوال مجالها $\mathbb{R}^2$ ما عدا أصفار المقام (أي ما عدا جميع الأزواج المرتبة التي تجعل المقام يساوي الصفر). ونكتب المجال على الصورة:

$\mathbb{R}^2 - \{\text{zeros}\}$ or $\mathbb{R}^2 \backslash \{\text{zeros}\}$

مثال: $f(x,y) = \frac{x^2 - y}{x^2 - 1}$. لتحديد المجال نضع

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ or } x = -1$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,y),(1,y)\}$ or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq \pm 1\}$

مثال: $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y \neq 0\}$ or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq -x\}$

مثال: $f(x,y) = \frac{13+x}{y-1}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,1)\}$ or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - 1 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 1\}$

مثال: $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0)\}$

Example: $f(x,y)=\frac{x}{y}$

$D_f=\mathbb{R}^2-\{(x,0)\}$ or $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\neq 0\}$

Example: $f(x,y)=\frac{5x+y^2-3}{x-y}$

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x-y\neq 0\}$

or $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\neq x\}$

Example: $f(x,y)=\frac{5x+y}{x^2+y^2-3}$

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2-3\neq 0\}$

or $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\neq 3\}$

Example: $f(x,y)=\frac{3xy}{x^2+y^2+3}$

لاحظ أن المقام $x^2+y^2+3\neq 0$ لأي $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. وعليه فأن

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

Example: $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2-y^2}$

بما أن

$x^2-y^2=0\Rightarrow y^2=x^2\Rightarrow y=\pm x$

فأن مجال الدالة هو جميع النقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ في المستوي XY ما عدا تلك النقاط الواقعة على المستقيمين $y=\pm x$. لذا

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\neq\pm x\}$

الدوال الجذرية Root Functions:

$f(x,y)=\sqrt[n]{g(x,y)}\ ,\ n\geq 2\ ,\ n\in N$

حيث أن $g(x,y)$ دالة متعددة حدود. لأيجاد المجال هناك حالتان للدالة الجذرية، الأولى أذا كان n فردي ففي هذه الحالة يكون المجال $\mathbb{R}^2$ ، اما اذا كان n زوجي فأن المجال يكون جميع الأزواج المرتبة التي تجعل ما تحت الجذر غير سالب، أي أن:

$\text{domain}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: g(x,y)\geq 0\}$

أمثلة:

$f(x,y)=\sqrt[3]{x+y}$

$f(x,y)=\sqrt[5]{1-x\,y}$

$f(x,y)=\sqrt[7]{y^2+5x+4}$

هذه الدوال مجالها $\mathbb{R}^2$.

مثال: $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

الحل: نضع المقدار الموجود داخل الجذر أكبر أو يساوي صفر

$y-x\geq 0 \Longrightarrow y\geq x \qquad \therefore \quad D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x\}$

مثال: $f(x,y)=\sqrt{y+x}$

الحل: $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq -x\}$

مثال: $f(x,y)=\sqrt{y^2-5x+6y}$

الحل: $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2-5x+6y\geq 0\}$

مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$. وأحسب قيمة كل من $f(1,-1)\,,\ f(0,1)$

الحل: الدالة معرفة عندما يكون المقدار $2-x^2-y^2$ غير سالب، أي أن

$2-x^2-y^2\geq 0 \Longrightarrow 2-(x^2+y^2)\geq 0 \Longrightarrow -(x^2+y^2)\geq -2$

وبالضرب في -1 نحصل على $(x^2+y^2)\leq 2$

وعليه فأن مجال هذه الدالة هو عبارة عن قرص مركزه نقطة الأصل ونصف قطره $\sqrt{2}$. أي أن

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 2\}$

أما مدى هذه الدالة هو الفترة المغلقة $[0,\sqrt{2}]$. أي أن $R_f=[0,\sqrt{2}]$

$$f(0,1)=\sqrt{2-0^2-1^2}=\sqrt{2-1}=\sqrt{1}=1$$

$$f(1,-1)=\sqrt{2-1^2-(-1)^2}=\sqrt{2-1-1}=\sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$$

Example: Find the domain and range of $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

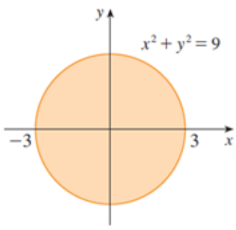
Solution:

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\}$

Since f is a positive square root, $f\geq 0$. Also, because $9-x^2-y^2\leq 9$,

we have $\sqrt{9-x^2-y^2}\leq 3$. So, the range is

$R_f=\{f\in\mathbb{R} : 0\leq f\leq 3\}=[0,3]$



Example: Find the domain of $f(x, \mathrm{y})=\sqrt{\mathrm{y}-x}$

$\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}: \mathrm{y}-x \geq 0\}$ or $\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}: \mathrm{y} \geq x\}$

Example: Find the domain of $f(x, \mathrm{y})=\sqrt{x^2+\mathrm{y}^2}$

بما أن المقدار $x^2+\mathrm{y}^2$ أكبر أو يساوي صفر لأي $(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ ، وعليه فأن المجال هو $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. أي أن $\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\}=\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Example: Find the domain of $f(x, \mathrm{y})=\sqrt{x^2+\mathrm{y}^2-1}$

$\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}, x^2+\mathrm{y}^2-1 \geq 0\}$

أيجاد المجال لدوال تحتوي في حدودها على دوال مثلثية أو دوال لوغاريتمية أو دوال أسية... الخ. نوضحها بالامثلة الاتية:

مثال: عين المجال للدالة $f(x, \mathrm{y})=x \mathrm{y}^2-\sin (x y)+\ln (x^2+\mathrm{y}^2-3)$.

الحل: $f(x, \mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط إذا كان $x^2+\mathrm{y}^2-3>0$ لأن دالة اللوغاريتم معرفة على القيم الموجبة فقط. أي أن $x^2+\mathrm{y}^2>3$

$\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}: x^2+\mathrm{y}^2>3\}$.

مثال: عين المجال للدالة $f(x, \mathrm{y})=\ln (x^2+\mathrm{y}^2-2 x-4 \mathrm{y}-8)$.

الحل: $f(x, \mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط إذا كان $x^2+\mathrm{y}^2-2 x-4 \mathrm{y}-8>0$. أي أن
$x^2+\mathrm{y}^2-2 x-4 \mathrm{y}>8$

$\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}):(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}: x^2+\mathrm{y}^2-2 x-4 \mathrm{y}>8\}$.

مثال: عين المجال للدالة $f(x, \mathrm{y})=\sin (x^2+\mathrm{y}^2)+\sqrt{x^2+\mathrm{y}^2-4 x+2 \mathrm{y}-15}$

الحل: $f(x, \mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط إذا كان $x^2+\mathrm{y}^2-4 x+2 \mathrm{y}-15 \geq 0$. أي أن
$x^2+\mathrm{y}^2-4 x+2 \mathrm{y} \geq 15$

$\mathrm{D}_f=\{(x, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}: x^2+\mathrm{y}^2-4 x+2 \mathrm{y} \geq 15\}$.

مثال: عين المجال للدالة $f(x,\mathrm{y})=\frac{\sin(x^2+\mathrm{y}^2)}{\sqrt{15-2\mathrm{y}+4x-x^2-\mathrm{y}^2}}$

الحل: $f(x,\mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط إذا كان $15-2\mathrm{y}+4x-x^2-\mathrm{y}^2>0$. أي أن
$x^2+\mathrm{y}^2-4x+2\mathrm{y}-15<0 \Rightarrow x^2+\mathrm{y}^2-4x+2\mathrm{y}<15$

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2 : x^2+\mathrm{y}^2-4x+2\mathrm{y}<15\}$.

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y})=\frac{\sin(x\mathrm{y})}{\sqrt{4+x^2+\mathrm{y}^2}}$

بما أن $\sin(x\mathrm{y})$ معرفة لجميع $(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2$ وأن $4+x^2+\mathrm{y}^2>0$ لأي $(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2$
فأن $\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y})=\mathrm{e}^{5x-\mathrm{y}^2+1}$

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y})=\mathrm{e}^{x\mathrm{y}}+\ln(x\mathrm{y})$

الدالة $\mathrm{e}^{x\mathrm{y}}$ معرفة لجميع $(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2$. أما دالة الوغاريتم $\ln(x\mathrm{y})$ فهي معرفة للقيم الموجبة فقط، أي أن هذه الدالة معرفة عندما $x\mathrm{y}>0$. وعليه فأن

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2 : x\mathrm{y}>0\}$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y},\mathrm{z})=\ln(\mathrm{z}-\mathrm{y})+x\mathrm{y}\sin\mathrm{z}$

Solution: The expression for $f(x,\mathrm{y},\mathrm{z})$ is defined as long as $\mathrm{z}-\mathrm{y}>0$.

So, the domain of f is

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\in\mathbb{R}^3 : \mathrm{z}-\mathrm{y}>0\}=\{(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\in\mathbb{R}^3 : \mathrm{z}>\mathrm{y}\}$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y})=\frac{\ln x}{x-5}$

الدالة $\ln x$ معرفة عندما $x>0$ ولاحظ أن مقام الدالة f يصبح صفراً عندما $x=5$.
وعليه فان مجال الدالة f يكون جميع النقاط ما عدا $x\leq 0$ و $x=5$. أي أن

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2, x>0, x\neq 5\}$

مثال: حدد المجال للدالة $f(x,\mathrm{y})=\frac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+\mathrm{y}^2-4}}$

الحل: $\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2, 9-x^2-y^2>0, x^2+\mathrm{y}^2-4>0\}$

مثال: حدد المجال للدالة $f(x,\mathrm{y})=\cos(x\mathrm{y})$

الحل: $\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

مثال: حدد المجال للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \tan(x+\mathrm{y})$

الحل: الدالة غير معرفة عندما $x+\mathrm{y} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ حيث أن n عدد صحيح. لذلك

$$D_f = \left\{(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, x+\mathrm{y} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \,, n \in Z\right\}$$

مثال: حدد مجال الدالة

$$f(x,\mathrm{y}) = \sqrt{\frac{1+x}{1-\mathrm{y}}}$$

الحل: لأيجاد المجال نستبعد جميع النقاط التي تجعل المقام صفر وكذلك النقاط التي يكون فيها الجذر سالب. أي أن

$$D_f = \left\{(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{y} \neq 1, \frac{1+x}{1-\mathrm{y}} \geq 0\right\}$$

مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \frac{\sqrt{x^2+\mathrm{y}^2-4}}{x-2\mathrm{y}}$.

الحل: الجذر التربيعي يكون معرفاً عندما $x^2 + \mathrm{y}^2 - 4 \geq 0$ ، أي أن $x^2 + \mathrm{y}^2 \geq 4$ وهذه تمثل جميع النقاط الواقعة على الدائرة $x^2 + \mathrm{y}^2 = 4$ وخارجها. كذلك الدالة معرفة عندما يكون المقدار $x - 2\mathrm{y} \neq 0$ او $\mathrm{y} \neq \frac{x}{2}$. وهكذا فان المجال يكون

$$D_f = \left\{(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \mathrm{y}^2 \geq 4 \,, \mathrm{y} \neq \frac{x}{2}\right\}$$

ولأيجاد مدى الدالة f نلاحظ بأن البسط يكون أما صفر أو أي عدد حقيقي موجب، ولكن المقام يمكن أن يكون أي عدد حقيقي سالب او موجب. وهكذا $f(x,\mathrm{y})$ يمكن أن تكون أي قيمة حقيقية، أي أن المدى هو جميع الاعداد الحقيقية. $R_f = \mathbb{R}$.

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \frac{3x-\mathrm{y}}{\sqrt{4-x^2-\mathrm{y}^2}}$

المجال هو جميع النقاط $(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2$ ما عدا النقاط التي تجعل المقام صفر وكذلك النقاط التي يكون فيها الجذر سالب. أي أن:

$$D_f = \{(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, 4 - x^2 - \mathrm{y}^2 > 0\}$$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \frac{\sqrt{3x^2+4\mathrm{y}^2-12}}{x+\mathrm{y}}$

بالنسبة للمقام نضع

$$x + \mathrm{y} \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{y} \neq x$$

بالنسبة للبسط نضع

$$3x^2 + 4\mathrm{y}^2 - 12 \geq 0$$

وعليه فأن:

$$D_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2,\ 3x^2 + 4\mathrm{y}^2 - 12 \geq 0,\ \mathrm{y} \neq x\}$$