أولاً: خطوات الحل بموجب الطريقة المبسطة في حالة تعظيم (Maximization) دالة الهدف (Z):

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP)، بموجب طريقة السمبلكس، نتبع الخطوات الآتية:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة القياسية (Standard Form)، بعد إضافة المتغيرات الفائضة أو الراكدة إلى كل من دالة الهدف (Z) وقيود النموذج، مع مراعاة جعل دالة الهدف (Z) مساوية (للصفر).
2. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible Solution)، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات (X_j ,S_i) في قيود النموذج، ودالة الهدف (Z).
3. تحديد المتغير الداخل (Entering Variable)، على أساس اكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).
4. تحديد المتغير الخارج (Leaving Variable)، عن طريق قسمة القيم الواقعة في الجهة اليمنى في عمود (R.H.S)، على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot Column) والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارج القسمة في عمود النسبة (Ratio) يعد هو المتغير الخارج، ليحل محله المتغير الداخل.
5. العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (Pivot Column).
6. الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (Pivot Row).
7. العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج يسمى بالعنصر المحوري (Pivot Column) بمعنى أخر [هو العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج].
8. يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري(Pivot Element).

9. لغرض تحسين الحل الممكن (Feasible Solution)، والحصول على الحل الأفضل (Best Solution) نتبع الآتي:

أ. إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New Z)، كالآتي:

معاملات (Z) الجديدة= معاملات (Z)− معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية.

ب. إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات (S_i)، كالآتي:

معاملات (S_i) الجديدة= معاملات (S_i) القديمة− معامل المتغير الداخل في صف (S_i) * المعادلة المحورية.

10. يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم (Maximization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات (C_j دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أكبر من أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \geq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات (C_j) في دالة الهدف (سالبة)، أي إن ($C_j < 0$)، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

11. يعاد إجراء الخطوات السابقة من (3−10) حتى يتم الحصول على جميع معاملات (C_j) في دالة الهدف (Z)، اكبر من أو تساوي الصفر أي إن ($C_j \geq 0$)، مما يعني ذلك، تم الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (9): جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex method):

Example 9: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

(Max. $Z= 30X_1+ 18X_2$

S.t. :

$$X_1+2X_2 \leq 200$$
$$3X_1+2X_2 \leq 300$$
$$X_1 \quad\quad \leq 150$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (L.P) السابق، إلى الصيغة القياسية، وكالآتي:

Max. $Z - 30X_1 - 18X_2 - oS_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$

S.t. :

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300$$
$$X_1 + S_3 = 150$$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الأتي: Table 1

Basic Variables	Non - Basic Variables					الثوابت (b_i^s)	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	-30	-18	0	0	0	0	-
S_1	1	2	1	0	0	200	200
S_2	3	2	0	1	0	300	100
S_3	1	0	0	0	1	150	150

الصف المحوري   العمود المحوري   العنصر المحوري

3. إن المتغير الداخل هو (X_1)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (30) في صف دالة الهدف (Z).
4. إن المتغير الخارج هو (S_2)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (100) في عمود النسبة (Ratio).

ملاحظة: تهمل القيم السالبة (−) أو غير المعرفة (∞) في عمود النسبة (Ratio).

5. إن العنصر المحوري هو القيمة (3)، والتي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري.
6. يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation)، من خلال قسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري (3)، أي إن:

$$\text{Pivot equation}=\left[\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{300}{3}\right]$$
$$=\left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0,100\right]$$

7. يمكن الحصول على القيم الجديدة لكل من دالة الهدف (Z) والمتغيرين (S_3, S_1)، على النحو الآتي:

$$\text{New }(Z)=[-30,\ -18,\ 0,0,0,0]-(-30)*\left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0,100\right]$$
$$=[-30,\ -18,\ 0,0,0,0]+[30,20,0,10,3000]$$
$$=[0,2,0,10,0,3000]$$
$$\text{New }(S_1)=[1,2,1,0,0,200]-(1)*\left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},100\right]$$
$$=\left[0,\frac{4}{3},1,\frac{-1}{3},0,100\right]$$
$$\text{New }(S_3)=[1,0,0,0,1,150]-(1)*\left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},100\right]$$
$$=\left[0,-\frac{2}{3},0,\frac{-1}{3},1,50\right]$$

نقوم بوضع النتائج السابقة في جدول حل ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Variables					الثوابت (b_i)
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z^*	0	2	0	10	0	3000
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	100
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	100
S_3	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	50

8. بما إن جميع معاملات (C_j) دالة الهدف الجديدة (Z) في الجدول أعلاه، هي أكبر وتساوي الصفر، أي إن ($C_j \geq 0$)، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:
$X_1 = 100, X_2 = 0, Z^* = 3000$

الاستنتاج:

من النتائج أعلاه، يتضح بأن إدارة المنشاة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (100) وحدة من المنتج (X_1)، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتج (X_2)، وبما يحقق لها أقصى الأرباح بلغت (3000) ثلاثة آلاف دينار .

مثال (10): جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (L.P) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

Example 10: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

Max. $Z= 3X_1+5X_2$

S. t. :

$$2X_1+3X_2 \leq 30$$
$$5X_1+4X_2 \leq 60$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج الخطة البرمجة الخطية السابق، إلى الصيغة القياسية، أي إن:

Max. $Z= 3X_1-5X_2+0S_1+0S_2= 0$

S.t. :

$$2X_1+3X_2+ S_1 \quad = 30$$
$$5X_1+4X_2+ \quad S_2 = 60$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي:

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i^*)	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
Z	-3	-5	0	0	0	-
S_1	2	3	1	0	30	10
S_2	5	4	0	-1	60	15

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

3. المتغير الداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (5) في صف دالة الهدف (Z).
4. المتغير الخارج هو (S_1)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).
5. العنصر المحوري هو القيمة (3).
6. يمكن الحصول على المعادلة المحور (Pivot Equation)، كالآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{30}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

7. يمكن الحصول على قيم (Z) و (S_2) الجديدتين، كالآتي:

$$\text{New (Z)} = [-3, -5, 0, 0, 0] - (-5) * \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

$$= [-3, -5, 0, 0, 0] + \left[\frac{10}{3}, 5, 0, 50\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$$

$$\text{New } (S_2) = [5, 4, 0, 1, 60] - 4 * \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

$$= [-3,-5,0,0,0] + \left[\frac{10}{3}, 5, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$$

$$\text{New } (S_2) = [5,4,0,1,60] - 4 * \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

$$[5,4,0,1,60] - \left[\frac{8}{3}, 4, \frac{4}{3}, 0, 40\right]$$

$$= \left[\frac{7}{3}, 0, \frac{-4}{3}, 1, 20\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i)
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z^*	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	50
X_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
S_2	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20

8. بما إن جميع معاملات دالة الهدف الجديدة (Z) في الجدول أعلاه، هي أكبر من وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \geq 0)$، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 0,\ X_2 = 10,\ Z^* = 50$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج أعلاه، بأن إدارة المنشاة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (10) وحدات من المنتج الثاني (X_2)، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتج الأول (X_1). وبما يحقق للمنشأة أقصى الأرباح بلغت (50) دينار.

مثال (11): جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

Example 11: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

Max. $Z= 6X_1+8X_2+2X_3$

S. t. :

$$X_1+X_2 \le 2$$
$$X_1+3X_3 \le 6$$
$$X_2 \le 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج الخطة البرمجة الخطية السابق، إلى الصيغة القياسية، أي إن:

Max. $Z- 6X_1-8X_2- 2X_3+0S_1+0S_2+0S_3= 0$

S.t. :

$$X_1+X_2+S_1 = 2$$
$$X_1+3X_3+S_2 = 6$$
$$X_2+S_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي:

Basic Var.	Non-Basic Variables						الثوابت (b_i^*)	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	-6	-8	-2	0	0	0	0	-
S_1	1	1	0	1	0	0	2	2
S_2	1	0	3	0	0	0	6	∞
S_3	0	1	0	0	1	1	1	1

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

3. المتغير الداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (8) في صف دالة الهدف (Z).

4. المتغير الخارج هو (S_3)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (1) في عمود النسبة (Ratio).

5. العنصر المحوري هو القيمة (1).