يمكن كتابة المعادلات اعلاه بالشكل التالي

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

1- نحول المصفوفة اعلاه الى مصفوفة مثلثية عليا وذلك باتباع ما يلي:

a) تصفير قيمة $a_{m1}, \dots a_{31}, a_{21}$ من المعادلات اي ما تحت القطر الرئيسي بشكل متتالي بالصيغة $m_1 = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$ بضرب في الصف الاول وبجمع مع الصف الثاني وكذلك $m_2 = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$ بضرب في الصف الاول وبجمع مع الصف الثالث وهكذا تصبح المصفوفة بالشكل التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \acute{a}_{22} & \dots & \acute{a}_{2n} & \acute{b}_2 \\ 0 & \acute{a}_{32} & \dots & \acute{a}_{3n} & \acute{b}_3 \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ 0 & \acute{a}_{m2} & \dots & \acute{a}_{mn} & \acute{b}_m \end{array}\right]$$

b) تصفير قيمة $\acute{a}_{m2}, \dots \acute{a}_{42}, \acute{a}_{32}$ حيث نجد $\acute{m}_1 = \frac{-\acute{a}_{32}}{a_{22}}$ يضرب في السطر الثاني ويجمع مع السطر الثالث وايضا نجد $\acute{m}_2 = \frac{-\acute{a}_{42}}{a_{22}}$ ويضرب في السطر الثاني ويجمع مع السطر الرابع وهكذا حتى تصبح المصفوفة بالشكل التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \acute{a}_{22} & \dots & \acute{a}_{2n} & \acute{b}_2 \\ & & & & \acute{b}_3 \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & \acute{}a_{mn} & \acute{b}_m \end{array}\right]$$

2- نحل المنظومة المثلثية العليا الجديدة بطريقة التعويض التراجعي

$$x_n = \frac{\acute{b}_m}{\acute{a}_{mn}}$$

.

.

.

$$x_2 = \frac{1}{\acute{a}_{22}}(\acute{b}_2 - \acute{a}_{23}x_3 - \ ... - \acute{a}_{2n}x_n)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}\, x_2 - \ ... - a_{1n}x_n)$$

<u>مثال:-</u> باستخدام طريقة كاوس للحذف جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - \ 2x_2 - \ x_3 &= \ 2 \end{aligned}$$

<u>الحل:-</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

بضرب $m_1 = \frac{-1}{3}$ في الصف الاول ويجمع مع الصف الثاني و بضرب $m_2 = \frac{-2}{3}$ في الصف الاول ويجمع مع الصف الثالث ينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 \\ 0 & -4/3 & -7/3 & -6 \end{array}\right]$$

بضرب $m_1 = \frac{4}{7}$ في الصف الثاني ويجمع مع الصف الثالث ينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$\frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 7 \Rightarrow x_2 + 2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$3x_x - 1 + 4 \Rightarrow x_x = 3$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (3,1,2)$$

2- طريقة گاوس جوردن Gauss- Jordan method

تعد هذه الطريقة من الطرق المباشرة وهي مشابه الى حد كبير لطريقة گاوس للحذف لحل منظومة من المعادلات $Ax = b$ والاختلاف بينهما هو ان الحل في طريقة گاوس جوردن يتم تحويل المصفوفة الى مصفوفة قطرية ولهذا نحصل مباشرة على الحل النهائي لمجموعة المعادلات ولاتحتاج لتطبيق التعويض التراجعي.

<u>مثال</u>:- باستخدام طريقة گاوس جوردن جد حل لمنظومة المعادلات

$$
\begin{aligned}
3x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 &= 12 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\
2x_1 - \ 2x_2 - \ x_3 &= \ 2
\end{aligned}
$$

<u>الحل</u>:-

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 3r_2 + r_1 \to r_2 \\ -2r_1 + 3r_3 \to r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & -7 & -21 \\ 0 & -4 & -7 & -18 \end{array}\right] -\frac{1}{7}r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 + r_1 \to r_1 \\ 4r_2 + r_3 \to r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \to r_1 \\ -\frac{1}{3}r_3 \to r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_3 + r_1 \to r_1 \\ -r_3 + r_2 \to r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (3,1,2)$$

واجب:- باستخدام طريقة گاوس للحذف / گاوس جوردن جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 2x - 6y - z &= -12 \\ 5x - y + 2z &= 29 \\ -3x - 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

الطرق التكرارية Iterative method

تمتاز هذه الطرق ببساطتها وسهولة برمجتها حيث ان الخطا يكون صغيرا جدا. وان من اهم الطرق التكرارية التي سوف نتطرق اليها هي :-

1- طريقة جاكوبي Jacobi method

تعد من اول الطرق التكرارية التي استخدمت لايجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكنها بطيئة في الوصول الى الحل الصحيح. لتكن لدينا منظومة المعادلات التالية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

بحيث ان $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn} \neq 0$ يمكن اعادة صياغة المعادلات الخطية اعلاه بالشكل الذي يسمح لنا ايجاد قيمة x_1 من المعادلة الاولى وقيمة x_2 من المعالدلة الثانية وهكذا الى قيمة x_n من المعادلة (n) وكالاتي:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n &= \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}) \end{aligned}$$

نفرض ان الحل الابتدائي هو $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ عندئذن نحصل على اول تقريب جديد للقيم $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ من خلال تعويضها بمنظومة المعادلات اعلاه وحسب ما يلي