مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\,x$. جد كل الأعداد الحقيقية، c ، في الفترة $(0,3)$ والتي كل منها يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل: واضح أن الدالة متعددة حدود، لذلك فهي مستمرة وقابلة الأشتقاق في $[0,3]$.

فأنه يوجد على الأقل عدد c في الفترة $(0,3)$.

نوجد $f'(x)$, $f(0)$, $f(3)$

$$f'(x) = x^2 + 2 \quad , \quad f(0) = 0 \quad , \quad f(3) = 15$$

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b} - \mathrm{a}} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{15 - 0}{3} = 5$$

وبما أن $f'(x) = x^2 + 2$ ، فأن

$$f'(\mathrm{c}) = \mathrm{c}^2 + 2$$

$$\mathrm{c}^2 + 2 = 5 \Longrightarrow \mathrm{c}^2 = 3 \Longrightarrow \mathrm{c} = \pm\sqrt{3}$$

بما أن $-\sqrt{3}$ خارج (لا ينتمي الى) الفترة $(0,3)$ ، فأن العدد الوحيد الذي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة للدالة f هو $\mathrm{c} = \sqrt{3}$.

مثال: بين فيما أذا كانت الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المبينة إزاء كل منها ؟. اذا كانت كذلك جد قيم c الممكنة.

$$f(x) = \sqrt{x} \ , \quad [0,9]$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 4 \ , \quad [-1,7]$$

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \ , \quad [-4,0]$$

$$f(x) = 3 + \sqrt{x} \ , \quad [0,4]$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \ , \quad [-1,1]$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x} \ , \quad [1,3]$$

تطبيقات على المشتقات

تعريف: أذا كان العدد c في مجال الدالة f وكان أما $f'(\mathrm{c}) = 0$ أو $f'(\mathrm{c})$ غير موجودة، فيقال أن c عدد حرج critical number للدالة f . وقيمة الدالة عند هذا العدد، أي $f(\mathrm{c})$ ، تسمى بالقيمة الحرجة. وتسمى النقطة $(\mathrm{c}, f(\mathrm{c}))$ بالنقطة الحرجة (أو أحداثيات النقطة الحرجة).

أيجاد النقاط الحرجة للدالة:

أولاً: نُوجِد المشتقة الأولى للدالة، ثم نوجد الاعداد الحرجة للدالة كالاتي:

- إذا كان هناك قيم x تجعل المشتقة غير معرَّفة (بشرط هذه القيم تقع في مجال الدالة) فهذه القيم تمثل أعداد حرجة.
- نساوي المشتقة الأولى بالصفر، ثم نَحُلُ المعادلة الناتجة لإيجاد قيم x. أذا كانت القيم الناتجة لــ x تقع في مجال الدالة فهذه القيم أيضاً تمثل أعداد حرجة للدالة.

ثانياً: نعوِّض القيم الناتجة لــ x (الاعداد الحرجة التي حصلنا عليها في الخطوات السابقة) في الدالة لإيجاد القيم الحرجة للدالة.

ثالثاً: النقاط الحرجة للدالة (أو أحاثيات النقاط الحرجة للدالة) تكون بالشكل: $(x, f(x))$.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^2 - 2\,x$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود، فأن مجالها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x - 2$

بما أن المشتقة الأولى معرفة على جميع قيم x ، أي لا يوجد قيم x تجعل المشتقة غير معرفة.

إذاً علينا إيجاد قيم x الممكنة فقط؛ بحيث تكون المشتقة الأولى مساوية للصفر.

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \in \mathrm{D}_f$

وهكذا، العدد الحرج هو $x = 1$. يمكننا إيجاد قيمة الدالة عند هذا العدد:

$f(1) = 1^2 - 2\,(1) = -1.$

اذاً النقطة الحرجة للدالة هي $(1, -1)$.

مثال: لتكن $f(x) = |x|$.

بما أن $0 \in \mathrm{D}_f$ وأن $f'(0)$ غير موجودة، فأن العدد $x = 0$ هو العدد الحرج للدالة وأن النقطة $(0, f(0))$ هي النقطة الحرجة للدالة.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

الحل: لاحظ أن مجال هذه الدالة هو $[0, \infty)$ وأن

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$. وبما أن العدد 0 يقع في مجال الدالة، فأن العدد الحرج لهذه الدالة هو $x = 0$. أما الاعداد الحرجة التي يتم الحصول عليها بمساواة المشتقة الأولى بالصفر، نلاحظ أن

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow 1 = 0$$

وهذا غير ممكن. لذلك فأن العدد الحرج الوحيد لهذه الدالة هو $x = 0$. أما النقطة الحرجة للدالة فهي:

$$(0, f(0)) = \left(0, \sqrt{0}\right) = (0, 0)$$

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \frac{x^2+16}{x^2}$

الحل: مجال هذه الدالة هو $\mathbb{R} - \{0\}$. نوجد المشتقة الأولى

$$f'(x) = \frac{x^2(2x) - (x^2+16)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 32x}{x^4} = \frac{-32x}{x^4} = \frac{-32}{x^3}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{-32}{x^3}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$ ، ولكن العدد 0 لا ينتمي الى مجال الدالة. كذلك اذا تم مساواة المشتقة بالصفر فأن:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-32}{x^3} = 0 \Longrightarrow -32 = 0$$

وهذا غير ممكن. أذاً لا توجد أعداد حرجة للدالة، وعليه ليس هناك نقاط حرجة للدالة.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^4 - 8\,x^2$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود، فأن مجالها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

لأيجاد الأعداد الحرجة، نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، ثم نضعها تساوي الصفر ونحل المعادلة بالنسبة لـــ x .

$$f'(x) = 4\,x^3 - 16\,x = 0 \Longrightarrow 4\,x\,(x^2 - 4) = 0$$
$$\Longrightarrow 4\,x\,(x+2)\cdot(x-2) = 0$$

وبحل المعادلة نحصل على الأعداد الحرجة:

$$x = 0\,, \qquad x = -2\,, \quad x = 2$$

ومنها نحصل على القيم الحرجة للدالة:

$f(0) = 0$
$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = 16 - 32 = -16$

$f(2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = 16 - 32 = -16$

أذاً النقاط الحرجة للدالة هي:

$(0,0)$, $(-2,-16)$, $(2,-16)$

جد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^4 - 8\,x^2$

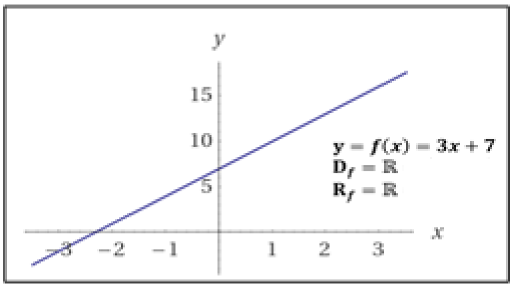
الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing and Decreasing Functions

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b)،

- أذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فان f متزايدة على الفترة (a, b) .
- أذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فان f متناقصة على الفترة (a, b).
- اذا كانت $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فأن f ثابتة على الفترة (a, b).

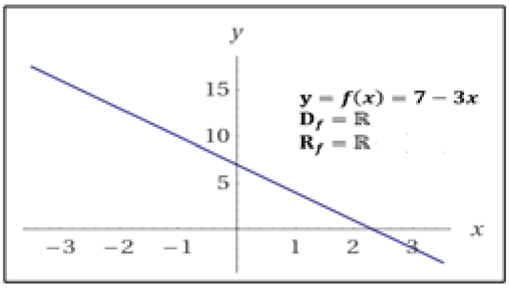
أي أن إشارة المشتقة الأولى تمكننا من معرفة تزايد وتناقص الدالة.

مثال: الدالة $f(x) = 3x + 7$ متزايدة في $\mathbb{R}$. لاحظ أن
$f'(x) = 3 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$



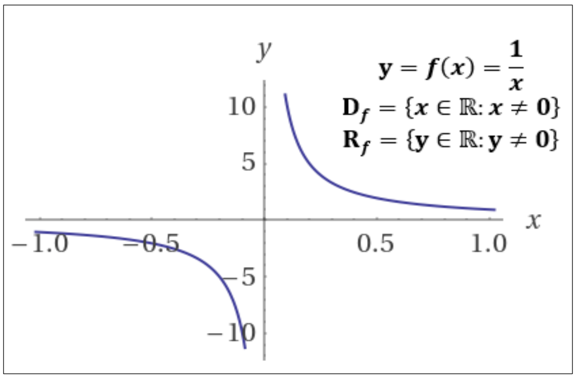
مثال: أفرض أن $f(x) = x^3$. هذه الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$ لأن
$f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

مثال: الدالة $f(x) = 7 - 3x$ متناقصة في $\mathbb{R}$ لأن
$f'(x) = -3 < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$



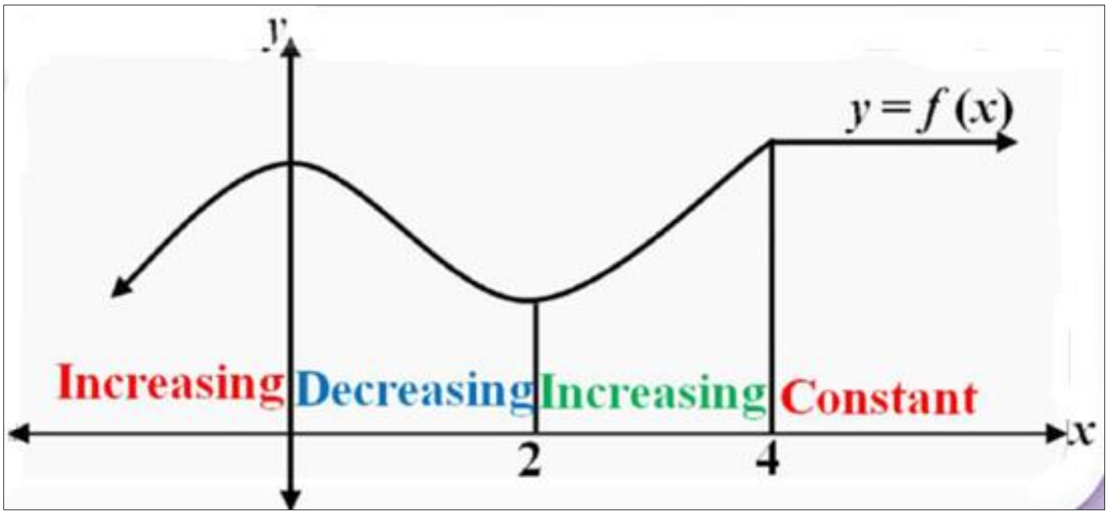
مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$. هذه الدالة متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ وكذلك على الفترة $(-\infty, 0)$ لأن المشتقة

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \;\; \forall\, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



تعريف: يقال للدالة $f(x)$ أنها رتيبة monotonic على فترة I أذا كانت اما متزايدة على I أو متناقصة على I .

تعريف: يقال عن الدالة $y = f(x)$ أنها ثابتة constant على الفترة $[a, b]$ أذا تحقق،
$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall \;\; x_1, x_2 \in [a, b]$



من الشكل نلاحظ أن الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0, 2)$ ومتزايدة مرة أخرى على الفترة $(2, 4)$ وثابتة على الفترة $(4, \infty)$.

خطوات تحديد فترات التزايد والتناقص للدالة

- نجد الاعداد الحرجة للدالة ونعينها على خط الاعداد، ومنها يتم تحديد الفترات.
- نختار عدد من كل فترة ونحسب المشتقة في هذا العدد.
- اذا كانت أشارة المشتقة موجبة تكون الدالة متزايدة واذا كانت سالبة تكون الدالة متناقصة.

مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$

الحل:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in \mathrm{D}_f .$$

وبذلك يكون لدينا فترتين هما $(-\infty, 2)$ و $(2, \infty)$.

لأختبار الفترة $(-\infty, 2)$ نأخذ عدد ينتمي الى هذه الفترة وليكن $x = 1$. نلاحظ أن أشارة المشتقة في هذا العدد

$f'(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2 < 0$ سالبة

هذا يعني أن الدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $(-\infty, 2)$.

لأختبار الفترة $(2, \infty)$ نأخذ عدد ينتمي الى هذه الفترة وليكن $x = 3$. نلاحظ أن أشارة المشتقة في هذا العدد

$f'(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2 > 0$ موجبة

وعليه، فأن الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(2, \infty)$.

مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ or } x = 2 .$$

هذه القيم لــ x تمثل أعداد حرجة للدالة.

لدينا ثلاث فترات $(-\infty, 0)$ ، $(0, 2)$ ، $(2, \infty)$.

أختبار الفترة $(-\infty, 0)$: لنأخذ $x = -1$ ، فأن

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9 > 0$ موجبة

أذاً الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$.

أختبار الفترة $(0, 2)$: لنأخذ $x = 1$ ، فأن

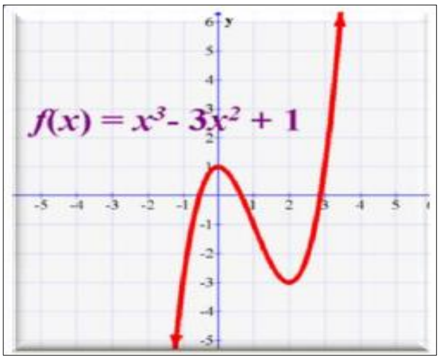
$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3 < 0$ سالبة

أذاً الدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $(0, 2)$.

أختبار الفترة $(2,\infty)$: لنأخذ $x = 3$ ، فأن

$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9 > 0$ موجبة

أذاً الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(2,\infty)$.



مثال: جد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

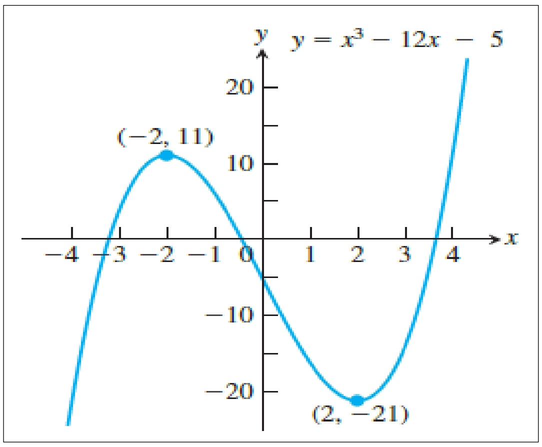
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow 3(x+2)(x-2) = 0$$

$\Longrightarrow x = -2, \text{ or } x = 2$ أعداد حرجة

وبذلك يكون لدينا ثلاث فترات $(-\infty,-2)$ ، $(-2,2)$ ، $(2,\infty)$.

Interval	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluated	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Sign of f'	$+$	$-$	$+$
Behavior of f	increasing	decreasing	increasing

واضح ان الدالة f متزايدة على الفترة $(-\infty,-2)$ ، متناقصة على الفترة $(-2,2)$ ، ومتزايدة على الفترة $(2,\infty)$.



مثال: جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدوال الاتية

$f(x) = x^2 \quad , \quad f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

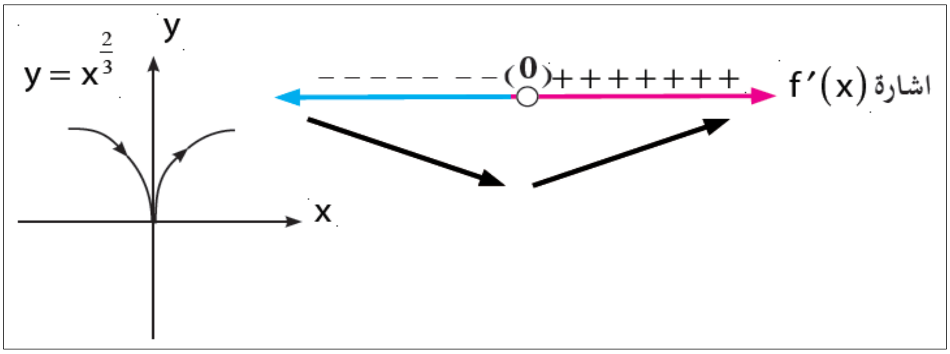
الحل:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2)^{\frac{1}{3}-1}(2x) = \frac{2}{3}x(x^2)^{\frac{-2}{3}} = \frac{2}{3}x\frac{1}{(x^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x\,x^3}} = \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}\frac{x}{x}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

المشتقة غير معرفة عند $x = 0$ وبما أن $0 \in D_f$ ، فأن العدد الحرج هو $x = 0$.



واضح أن الدالة f متزايدة على الفترة $(0, \infty)$ ، متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$

القيم العظمى والصغرى Maximum and minimum values

تعريف:

يقال أن للدالة f قيمة عظمى محلية (أو نسبية) local (relative) maximum value عند $x = x_0$ ، أذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) في منطلق f تحتوي على x_0 ، بحيث أن

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)$$

وتسمى $(x_0, f(x_0))$ أحداثيات نقطة القيمة العظمى المحلية للدالة.