$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)$$
$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_n^1 = \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1^0 - a_{m2}x_2^0 - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}^0)$$

نستخدم القيم جديد من التكرار الاول $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ لايجاد قيم التكرار الثاني وهكذا.
الصيغة العامة لطريقة جاكوبي التكرارية هي

$$x_i^{(k+1)} = (\, b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij}x_j^k)/a_{ii},\ n = 1,2,\dots$$

نتوقف عندما $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \leq \epsilon$ وان شرط التقارب للوصول الى الحل الصحيح هو

$$max \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

2- طريقة گاوس - سيدل Gauss-Seidel method

تعتبر طريقة گاوس-سيدل تحسين لطريقة جاكوبي, حيث تستخدم التقريبات الجديدة المحسوبة x_i^{k+1} بمجرد حسابها دون الانتظارالى دورة ثانية.

نفترض ان النظام الخطي المراد حله هو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

فان قيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ من المعادلات اعلاه تستخرج من خلال الصيغة التالية

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1^{(k+1)} - a_{m2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}^{(k+1)})$$

الصيغة العامة لطريقة كَاوس - سيدل التكرارية هي

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^k)/a_{ii},\ n = 1,2, \dots$$

نتوقف عندما $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \epsilon$ وان شرط التقارب للوصول الى الحل الصحيح هو

$$max \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

<u>مثال:-</u> باستخدام طريقة جاكوبي / كَاوس - سيدل جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 10x_1 + \ x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 \ + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + \ x_2 + \ 10x_3 &= \ 12 \end{aligned}$$

حيث ان $x_1^0 = x_2^0 = \ x_3^0 = 0$ ولثلاث تكرارات.

<u>الحل:-</u>

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$$

$$max\{0.2, 0.2, 0.2\} = 0.2 < 1 \Rightarrow convergence$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_2^k - x_3^k\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^k - x_3^k\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^k - x_2^k\right)$$

$$k = 0$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^0 - x_2^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^1 - x_3^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_3^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_2^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$$

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^2 - x_3^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_3^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$$

By Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_2^k - x_3^k\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k+1)} - x_3^k\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)$$

$k = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 0) = 1.08$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_2^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.08) = 0.972$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 1.08 - 0.972) = 0.9948$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0.9948 - 0.972) = 1.00332$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.9948 - 1.00332) = 1.000188$$

مثال:- باستخدام طريقة جاكوبي / كاوس - سيدل جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

حيث ان $x_1^0 = 1, x_2^0 = 3, \ x_3^0 = 2$ ولثلاث تكرارات.