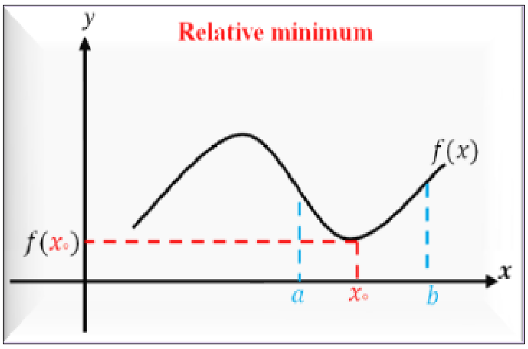
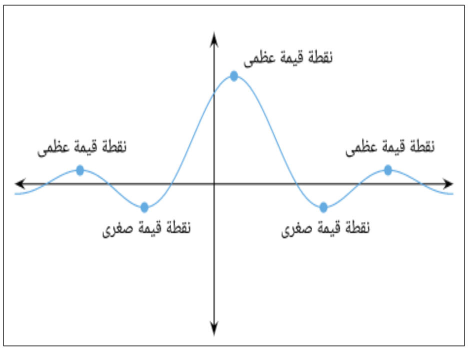
كما يقال أن للدالة f قيمة صغرى محلية (أو نسبية) local (relative) minimum value عند $x = x_0$ ، أذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) في منطلق f تحتوي على x_0 ، بحيث أن

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in (a,b)$$

وتسمى $(x_0, f(x_0))$ أحداثيات نقطة القيمة الصغرى المحلية للدالة.





ملاحظة–1: تسمى القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية قيم قصوى محلية للدالة وتسمى نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية بالنقاط القصوى المحلية للدالة.

ملاحظة–2: كل نقطة قصوى محلية هي نقطة حرجة للدالة والعكس غير صحيح دائماً.

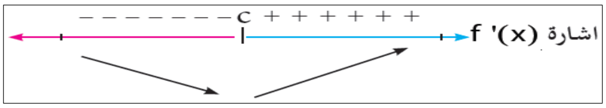
ملاحظة–3: يمكن تصنيف النقاط الحرجة الى نقاط قيم عظمى محلية، أو نقاط قيم صغرى محلية، أو نقاط انقلاب.

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الأولى

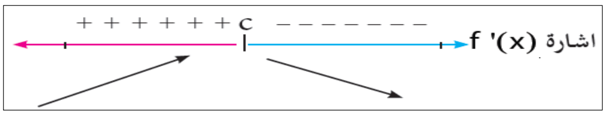
أ– نجد الاعداد الحرجة للدالة وذلك بحل المعادلة $f'(x) = 0$.

ب– ندرس أشارة المشتقة الأولى عن يمين ويسار الأعداد الحرجة c ويكون لدينا الحالات الاتية:

- أذا تغيرت أشارة المشتقة من السالب الى الموجب حول العدد الحرج c فأنه يوجد قيمة صغرى محلية هي $f(c)$ وأحداثيات نقطة القيمة الصغرى المحلية هي $(c, f(c))$.



- أذا تغيرت أشارة المشتقة من الموجب الى السالب حول العدد الحرج c فأنه يوجد قيمة عظمى محلية هي $f(c)$ وأحداثيات نقطة القيمة العظمى المحلية هي $(c, f(c))$.



- أذا لم تتغير أشارة المشتقة حول العدد الحرج c فأن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية للدالة f .

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية

يمكننا في كثير من الأحيان أستعمال المشتقة الثانية للدالة لأجل أختبار وجود القيم القصوى المحلية ومعرفة نوعها. وطريقة الأختبار بالمشتقة الثانية كالاتي:

ليكن c عدد حرج للدالة f وأن $f''(\mathrm{c})$ موجودة عندئذ

1) أذا كانت $f''(\mathrm{c}) > 0$ ، فان للدالة قيمة صغرى محلية عند c .

2) أذا كانت $f''(\mathrm{c}) < 0$ ، فان للدالة قيمة عظمى محلية عند c .

ملاحظة: في حالة $f''(\mathrm{c}) = 0$ أو $f''(\mathrm{c})$ غير معرفة فلا يصح هذا الاختبار.

مثال: جد نقاط القيم القصوى المحلية، وحدد نوعها، للدالة:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

الحل: بتطبيق الخطوات (أستعمال المشتقة الاولى)

$$f'(x) = 2x - 4$$

$2x - 4 = 0 \Longrightarrow 2x = 4 \Longrightarrow x = 2$ العدد الحرج

نختار العدد 2.1 عن يمين العدد الحرج والعدد 1.9 عن يساره ونختبر أشارة المشتقة

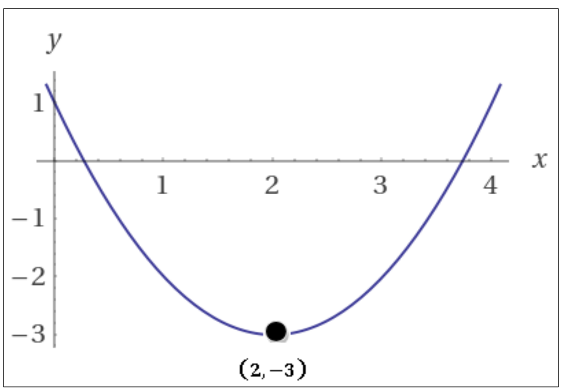
$$f'(1.9) = 2(1.9) - 4 = -0.2 < 0$$
$$f'(2.1) = 2(2.1) - 4 = 0.2 > 0$$

بما أن أشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب حول العدد الحرج $x = 2$ ، فأن للدالة قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$. ولما كان

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

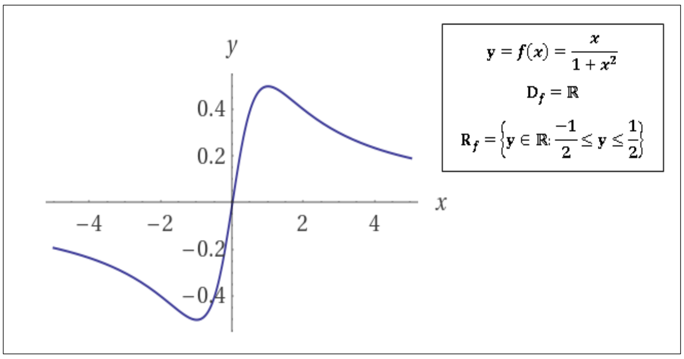
فأن القيمة الصغرى المحلية للدالة هي -3 وتكون في النقطة $(2, -3)$.

لاحظ أن $f(2) = -3$ هي في الحقيقة قيمة صغرى مطلقة للدالة لان الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 2)$ ومتزايدة على الفترة $(2, \infty)$. وعليه، فأن أحداثيات القيمة الصغرى المطلقة للدالة هي $(2, -3)$.



مثال: جد نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية وأدرس تزايد وتناقص الدالة $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة في $\mathbb{R}$. أي أن مجال الدالة هو جميع الاعداد الحقيقية.



$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

$\Longrightarrow 1-x^2=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$ الأعداد الحرجة

والان نعين أشارة المشتقة $f'(x)$ ، لاحظ أن أشارة المشتقة تتحدد من إشارة البسط لأن أشارة المقام موجبة لكل $x\in\mathbb{R}$.

	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
أشارة $f'(x)$	سالبة	موجبة	سالبة

بما أن أشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب حول العدد الحرج $x=-1$ ، فأن للدالة قيمة صغرى محلية عندما $x=-1$. وبما أن

$$f(-1)=\frac{-1}{1+(-1)^2}=\frac{-1}{2}$$

فأن القيمة الصغرى المحلية للدالة هي $\frac{-1}{2}$ وتكون في النقطة $(-1,\frac{-1}{2})$.

وبما أن أشارة المشتقة تتغير من الموجب الى السالب حول العدد الحرج $x=1$ ، فأن للدالة قيمة عظمى محلية عندما $x=1$. وبما أن

$$f(1)=\frac{1}{1+(1)^2}=\frac{1}{2}$$

فأن القيمة العظمى المحلية للدالة هي $\frac{1}{2}$ وتكون في النقطة $(1,\frac{1}{2})$.

نلاحظ من الجدول أن $f'(x)$ سالبة في الفترتين $(1,\infty)$ ، $(-\infty,-1)$ ، وموجبة في الفترة $(-1,1)$. وعليه، فأن الدالة متناقصة على الفترتين $(1,\infty)$ ، $(-\infty,-1)$ ومتزايدة على الفترة $(-1,1)$.

مثال: جد نقاط القيم القصوى المحلية، وبين نوعها، للدالة $f(x) = x^3 - x$

الحل: مجال الدالة هو $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3\,x^2 - 1$$

$$3\,x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3\,x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$ أعداد حرجة

بأستعمال المشتقة الثانية:

$$f''(x) = 6\,x$$

عندما $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، تكون

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$

لذلك، للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

وعندما $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، تكون

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 6\,\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$$

لذلك، للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

ولإيجاد أحداثيات نقاط القيم القصوى المحلية، نجد قيمة الدالة العظمى والصغرى المحلية وذلك بالتعويض في الدالة المعطاة:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

وعندئذ تكون أحداثيات نقطة القيمة الصغرى المحلية هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$ وأحداثيات نقطة القيمة العظمى المحلية هي $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.

مثال: جد نقاط القيم القصوى المحلية وبين نوعها $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\,x + 2$

الحل:

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2\,, x = -1$$

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2\,(2) + 2 = \frac{-4}{3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2\,(-1) + 2 = \frac{19}{6}$$

$$f''(x) = 2x - 1$$

عندما $x = 2$ ، فأن

$$f''(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

وعليه، فأن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ ، وأحداثياتها هي $\left(2, \frac{-4}{3}\right)$

عندما $x = -1$ ، فأن

$$f''(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3 < 0$$

وعليه، فأن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ ، وأحداثياتها هي $\left(-1, \frac{19}{6}\right)$.

مثال: جد جميع النقاط الحرجة، وبين نوعها، وجد فترات التزايد والتناقص للدالة

$$f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

المشتقة غير معرفة عندما $x = 0$. وفي حالة

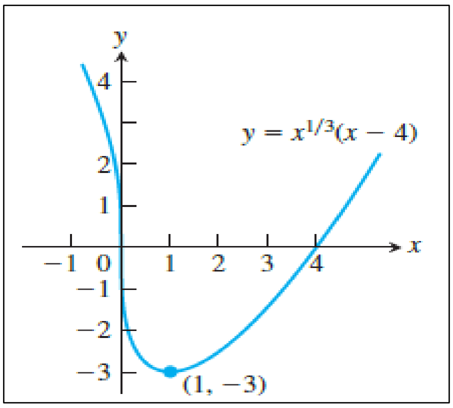
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} = 0 \Longrightarrow 4(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

وبذلك يكون لدينا عددان حرجان هما: $x = 0$ و $x = 1$.

بالنسبة لفترات التزايد والتناقص لدينا ثلاث فترات $(-\infty, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, \infty)$.

Interval	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sign of f'	$-$	$-$	$+$
Behavior of f	decreasing	decreasing	increasing

وبذلك فأن الدالة متناقصة على الفترتين $(-\infty, 0)$ ، $(0, 1)$ ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$.



بالنسبة للقيم القصوى المحلية للدالة: بما أن أشارة المشتقة لم تتغير عند $x = 0$ ، فليس للدالة قيمة عظمى او صغرى هناك. وبما أن أشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب عند $x = 1$ ، فأن للدالة قيمة صغرى محلية وهي

$$f(1) = f(x) = 1^{4/3} - 4(1)^{1/3} = 1 - 4 = -3$$

وهي ايضاً قيمة صغرى مطلقة للدالة لان الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 1)$ ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$. وعليه، فأن أحداثيات القيمة الصغرى المطلقة للدالة هي: $(1, -3)$.

الواجب: جد فترات تزايد وفترات تناقص ونقاط القيم القصوى المحلية للدوال (أن وجدت)

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$$
$$f(x) = 1 + (x - 2)^2$$
$$f(x) = 1 - (x - 2)^2$$
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$
$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$
$$f(x) = x^2 - 4$$
$$f(x) = x - x^3$$
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$$
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

التكامل غير المحدد **Indefinite Integral**

يقال للدالة $F(x)$ أنها عكس مشتقة الدالة $f(x)$ في الفترة J ، اذا كان لكل x في J

$$d\big(F(x)\big) = f(x)\,dx$$

يطلق على عملية أيجاد عكس المشتقة لدالة معطاة بـــ عكس التفاضل anti-differentiation

ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل. لذلك عندما تكون

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{أي} \qquad d\big(F(x)\big) = f(x)\,dx$$

نكتب

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

أي

$$\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C$$

حيث أن C أي ثابت أختياري (ثابت التكامل).

وقد سميت عملية عكس التفاضل بعملية التكامل غير المحدد، وأطلق على الرمز $\int$ رمز التكامل. ويكون مع هذا الرمز دائماً تفاضل المتغير المستقل، فأذا كانت f دالة للمتغير المستقل x ، فنكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x)\,dx$ وأن dx تدل على أن هذه العملية تجري بالنسبة للمتغير x . من ذلك نستنتج أن الرمز $\int \ldots\, dx$ هو عكس الرمز $\frac{d\ldots}{dx}$

صيغ أساسية للتكامل

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad , \quad m \neq -1$

3) $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ حيث a ثابت

4) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \;\pm\; \int g(x)\,dx$

5) $\int \,(f(x))^m \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{m+1}}{m+1} + C \qquad , \quad m \neq -1$

6) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

7) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int (5\,x^6 - 2\,x^4 + 3\,x^2 - 6)\,dx$$

الحل:

$$I = \int 5\,x^6\,dx - \int 2\,x^4\,dx + \int 3\,x^2\,dx - \int 6\,dx$$

$$= 5\int x^6\,dx - 2\int x^4\,dx + 3\int x^2\,dx - 6\int dx$$

$$= 5\,\frac{x^7}{7} - 2\,\frac{x^5}{5} + 3\,\frac{x^3}{3} - 6\,x + C$$

$$= 5\,\frac{x^7}{7} - 2\,\frac{x^5}{5} + x^3 - 6\,x + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

الحل:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\,\sqrt{x} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)dx$$

الحل:

$$I = \int x^2\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3\,x^{\frac{2}{3}} + 5\,x^{\frac{-1}{2}}\right)dx$$

الحل:

$$I = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 3\int x^{\frac{2}{3}}\,dx + 5\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + 10\,x^{\frac{1}{2}} + C$$