مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,\mathrm{y}) = x^2 + x\mathrm{y}^2$

الحل: المطلوب إيجاد $f_{xx}\ ,\ f_{\mathrm{yy}}\ ,\ f_{x\mathrm{y}}\ ,\ f_{\mathrm{y}x}$

$$f_x = 2x + \mathrm{y}^2 \quad , \quad f_{x\mathrm{y}} = 2\mathrm{y} \quad , \quad f_{xx} = 2$$
$$f_{\mathrm{y}} = 2x\mathrm{y} \quad , \quad f_{\mathrm{y}x} = 2\mathrm{y} \quad , \quad f_{\mathrm{yy}} = 2x$$

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,\mathrm{y}) = 3x^2 + \mathrm{y}^2$

الحل: المطلوب إيجاد $f_{xx}\ ,\ f_{\mathrm{yy}}\ ,\ f_{x\mathrm{y}}\ ,\ f_{\mathrm{y}x}$

$$f_x = 6x \quad , \quad f_{xx} = 6 \quad , \quad f_{x\mathrm{y}} = 0$$
$$f_{\mathrm{y}} = 2\mathrm{y} \quad , \quad f_{\mathrm{yy}} = 2 \quad , \quad f_{\mathrm{y}x} = 0$$

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \ln(3x - 5\mathrm{y})$

الحل:

$$f_x = \frac{3}{3x - 5\mathrm{y}} \quad , \quad f_{x\mathrm{y}} = \frac{(3x - 5\mathrm{y}) \cdot 0 - 3(-5)}{(3x - 5\mathrm{y})^2} = \frac{15}{(3x - 5\mathrm{y})^2}$$

$$f_{xx} = \frac{(3x - 5\mathrm{y}) \cdot 0 - 3(3)}{(3x - 5\mathrm{y})^2} = \frac{-9}{(3x - 5\mathrm{y})^2}$$

$$f_{\mathrm{y}} = \frac{-5}{3x - 5\mathrm{y}} \quad , \quad f_{\mathrm{y}x} = \frac{(3x - 5\mathrm{y}) \cdot 0 - (-5)(3)}{(3x - 5\mathrm{y})^2} = \frac{15}{(3x - 5\mathrm{y})^2}$$

$$f_{\mathrm{yy}} = \frac{(3x - 5\mathrm{y}) \cdot 0 - (-5)(-5)}{(3x - 5\mathrm{y})^2} = \frac{-25}{(3x - 5\mathrm{y})^2}$$

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة

$$f(x,\mathrm{y}) = \ln(2x + 2\mathrm{y}) + \tan(2x - 2\mathrm{y})$$

الحل:

$$f_x = \frac{2}{2x + 2\mathrm{y}} + 2\sec^2(2x - 2\mathrm{y}) = \frac{1}{x + \mathrm{y}} + 2\sec^2(2x - 2\mathrm{y})$$

$$f_{x\mathrm{y}} = \frac{(x + \mathrm{y}) \cdot 0 - 1(1)}{(x + \mathrm{y})^2} + 2(2)\sec(2x - 2\mathrm{y})\sec(2x - 2\mathrm{y})\tan(2x - 2\mathrm{y}) \cdot (-2)$$

$$= \frac{-1}{(x + \mathrm{y})^2} - 8\sec^2(2x - 2\mathrm{y})\tan(2x - 2\mathrm{y})$$

$$f_{xx} = \frac{(x+\mathrm{y})\cdot 0 - 1(1)}{(x+\mathrm{y})^2} + 2(2)\sec(2x-2\mathrm{y})\sec(2x-2\mathrm{y})\tan(2x-2\mathrm{y})\cdot(2)$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{(x+\mathrm{y})^2} + 8\sec^2(2x-2\mathrm{y})\tan(2x-2\mathrm{y})$$

$$f_{\mathrm{y}} = \frac{2}{2x+2\mathrm{y}} - 2\sec^2(2x-2\mathrm{y}) = \frac{1}{x+\mathrm{y}} - 2\sec^2(2x-2\mathrm{y})$$

$$f_{yx} = \frac{(x+\mathrm{y})\cdot 0 - 1(1)}{(x+\mathrm{y})^2} - 2(2)\sec(2x-2\mathrm{y})\sec(2x-2\mathrm{y})\tan(2x-2\mathrm{y})\cdot(2)$$

$$f_{\mathrm{y}x} = \frac{-1}{(x+\mathrm{y})^2} - 8\sec^2(2x-2\mathrm{y})\tan(2x-2\mathrm{y})$$

$$f_{\mathrm{yy}} = \frac{(x+\mathrm{y})\cdot 0 - 1(1)}{(x+\mathrm{y})^2} - 2(2)\sec(2x-2\mathrm{y})\sec(2x-2\mathrm{y})\tan(2x-2\mathrm{y})\cdot(-2)$$

$$f_{\mathrm{yy}} = \frac{-1}{(x+\mathrm{y})^2} + 8\sec^2(2x-2\mathrm{y})\tan(2x-2\mathrm{y})$$

مثال: لتكن $f(x,\mathrm{y}) = \cos(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}}$. بين أن

$$f_{xx} + f_{\mathrm{yy}} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\cos(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} = -2\cos(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2} = 4\cos(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2} = -4\cos(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}} + 4\cos(2x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{y}} = 0$$

مثال: لتكن $f(x,\mathrm{y}) = \ln(x^2+\mathrm{y}^2+1)$. جد $\frac{\partial f(x,\mathrm{y})}{\partial x}$ و $\frac{\partial f(x,\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}$

$$\frac{\partial f(x,\mathrm{y})}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+\mathrm{y}^2+1} \quad , \quad \frac{\partial f(x,\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} = \frac{2\mathrm{y}}{x^2+\mathrm{y}^2+1}$$

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بـــ $f(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = x\cos\mathrm{y} + \mathrm{z}\sin\mathrm{y}$ فأن:

$$f_x = \cos\mathrm{y} \quad , \quad f_{\mathrm{y}} = -x\sin\mathrm{y} + \mathrm{z}\cos\mathrm{y} \quad , \quad f_{\mathrm{z}} = \sin\mathrm{y}$$

Example: For the function $f(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = \frac{x\mathrm{z}^3}{\mathrm{y}} + \ln(\mathrm{yz})$, find all of the first- and second-order derivatives and verify that

$$f_{x\mathrm{y}} = f_{\mathrm{y}x} \ , \ f_{x\mathrm{z}} = f_{\mathrm{z}x} \text{ and } f_{\mathrm{yz}} = f_{\mathrm{zy}}$$

Example: Find expressions for all first- and second-order partial derivatives of the following functions. In each cases verify that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$f(x,\mathrm{y}) = x\mathrm{y}$, $f(x,\mathrm{y}) = \mathrm{e}^{x}\mathrm{y}$, $f(x,\mathrm{y}) = x^2 + 2x + \mathrm{y}$

$f(x,\mathrm{y}) = 16\, x^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{y}^{\frac{3}{4}}$, $f(x,\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{y}}{x^2} + \frac{x}{\mathrm{y}}$

مثال: اذا كانت $f(x,y) = x\cos(x\mathrm{y})\,\mathrm{e}^{xy} + \sin \mathrm{y}$ جد f_x و f_{y}

مثال: اذا كانت $f(x,\mathrm{y}) = \mathrm{y}\cos(x\mathrm{y})\,\mathrm{e}^{xy} + \sin x$ جد f_x و f_{y}

مثال: اذا كانت $f(x,\mathrm{y}) = (x-\mathrm{y})\sin(x+\mathrm{y})$ جد f_x و f_{y}

مثال: اذا كانت $f(x,\mathrm{y}) = \mathrm{y}\cos^6(x^2)$ جد f_x و f_{y}

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \sin(x\mathrm{y}^2) + \ln\left(\frac{x}{\mathrm{y}}\right)$

المطلوب إيجاد: f_{xx} , f_{yy} , $f_{x\mathrm{y}}$, $f_{\mathrm{y}x}$

التكامل الثنائي Double integral

التكامل الثنائي (أو التكامل المضاعف) هو أحد أنواع التكامل يشمل الدوال المعرفة في متغيرين. فأذا كانت $f(x,\mathrm{y})$ دالة معرفة في المنطقة R من المستوي $x\mathrm{y}$ فأن

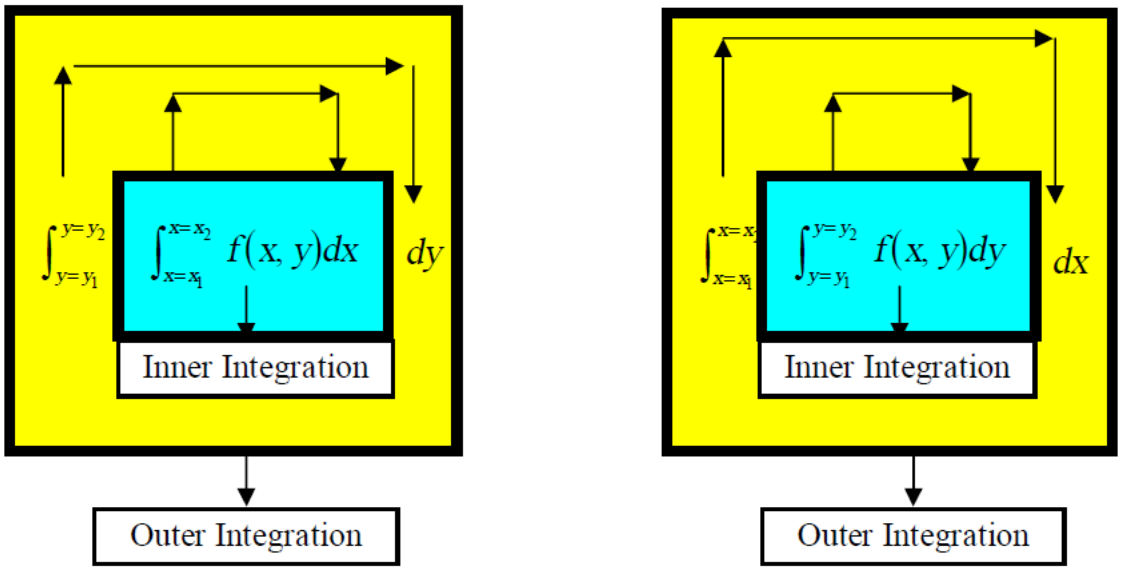
$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\mathrm{y}$$

يسمى التكامل الثنائي للدالة $f(x,\mathrm{y})$ في المنطقة R.

وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي وفي الكهرومغناطيسية والحرارة والموجات الصوتية والميكانيك ومواضيع اخرى.

لحساب التكامل الثنائي $\iint_{\mathrm{R}} f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\mathrm{y}$ نبدأ اولاً بالتكامل الداخلي ونكامله بالنسبة للمتغير x ونعتبر y ثابتاً ثم نجد قيمة التكامل الخارجي والذي نكامله بالنسبة لـــ y.

أما اذا كان التكامل الثنائي بهذا الشكل $\iint_{\mathrm{R}} f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{d}\mathrm{y}\mathrm{d}x$ نبدأ بالتكامل الداخلي ونكامله بالنسبة للمتغير y ونعتبر x ثابتاً ثم نجد قيمة التكامل الخارجي والذي نكامله بالنسبة لـــ x.



مثال: لتكن $f(x,\mathrm{y}) = 1 - x^2 - \mathrm{y}^2$ ، المنطقة $0 \le \mathrm{y} \le 1\,, 0 \le x \le 1$. أحسب التكامل الاتي:

$$\int_0^1 \int_0^1 (1 - x^2 - \mathrm{y}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathrm{y}$$

الحل: لنبدأ أولاً بالتكامل الداخلي، يعني نكامل بالنسبة للمتغير x ونعتبر y ثابت.

$$\int_0^1 (1 - x^2 - \mathrm{y}^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{3} - \mathrm{y}^2 x\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1^3}{3} - \mathrm{y}^2(1)\right] - [0] = \frac{2}{3} - \mathrm{y}^2$$

والان نجري التكامل الخارجي، نأخذ الناتج السابق ونكامله بالنسبة للمتغير y

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} - \mathrm{y}^2\right)\mathrm{d}\mathrm{y} = \left[\frac{2\mathrm{y}}{3} - \frac{\mathrm{y}^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right] - [0] = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_0^1 \int_0^1 (1 - x^2 - \mathrm{y}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathrm{y} = \frac{1}{3}$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}\mathrm{y}\,\mathrm{d}x$

الحل: التكامل الداخلي، أي نكامل بالنسبة للمتغير y : $\int_{x^2}^{x} \mathrm{d}\mathrm{y} = [\mathrm{y}]_{x^2}^{x} = x - x^2$

التكامل الخارجي، أي نكامل بالنسبة لـــ x :

$$\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] - [0] = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}\mathrm{y}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

Example: Evaluate the double integral $\int_{-1}^{2} \int_{2x^2+2}^{x^2+2} x\,\mathrm{d}\mathrm{y}\,\mathrm{d}x$

Inner Integration:

$$\int_{2x^2+2}^{x^2+2} x\,\mathrm{d}\mathrm{y} = x[\mathrm{y}]_{2x^2+2}^{x^2+2} = x\big((x^2+2) - (2x^2+2)\big) = x(x^2 + 2 - 2x^2 - 2)$$

$$= x(-x^2) = -x^3$$

Outer Integration: $-\int_{-1}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = -\left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = -4 + \frac{1}{4} = \frac{-15}{4}$

$$\therefore \int_{-1}^{2} \int_{2x^2+2}^{x^2+2} x\,\mathrm{d}\mathrm{y}\,\mathrm{d}x = \frac{-15}{4}$$

Example: Evaluate the double integral $\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} \mathrm{p}\sin\theta \ \mathrm{dp}\,\mathrm{d}\theta$

Inner Integration:

$$\int_0^{\cos\theta} \mathrm{p}\sin\theta \ \mathrm{dp} = \sin\theta\left[\frac{\mathrm{p}^2}{2}\right]_0^{\cos\theta} = \sin\theta\left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos^2\theta$$

Outer Integration:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{6}\left(\cos^3(\pi) - \cos^3(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{6}((-1)^3 - 1^3) = -\frac{1}{6}(-1-1) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} \mathrm{p}\sin\theta \ \mathrm{dp}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}$$

Example: Evaluate the double integral $\int_2^3\int_1^5 (x+2\mathrm{y})\mathrm{d}x\ \mathrm{dy}$

Inner Integration:

$$\int_1^5 (x+2\mathrm{y})\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2\mathrm{y}x\right]_1^5 = \left(\frac{5^2}{2} + 10\mathrm{y}\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2\mathrm{y}\right) = \frac{25}{2} + 10\mathrm{y} - \frac{1}{2} - 2\mathrm{y} = 12 + 8\mathrm{y}$$

Outer Integration:

$$\int_2^3 (12+8\mathrm{y})\ \mathrm{dy} = \left[12\mathrm{y} + 8\frac{\mathrm{y}^2}{2}\right]_2^3 = [12\mathrm{y} + 4\mathrm{y}^2]_2^3 = (36+36) - (24+16) = 32$$

$$\therefore \int_2^3\int_1^5 (x+2\mathrm{y})\mathrm{d}x\ \mathrm{dy} = 32$$

Example: Evaluate the double integral $\int_0^1\int_{x^2}^{x^3} (x^2+\mathrm{y}^2)\ \mathrm{dy}\,\mathrm{d}x$

Inner Integration:

$$\int_{x^2}^{x^3} (x^2+\mathrm{y}^2)\ \mathrm{dy} = \left[x^2\mathrm{y} + \frac{\mathrm{y}^3}{3}\right]_{x^2}^{x^3} = \left(x^2x^3 + \frac{(x^3)^3}{3}\right) - \left(x^2x^2 + \frac{(x^2)^3}{3}\right) = x^5 + \frac{x^9}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}$$

Outer Integration:

$$\int_0^1 \left(x^5 + \frac{x^9}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{30} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 = \frac{-1}{21}$$

$$\therefore \int_0^1\int_{x^2}^{x^3} (x^2+\mathrm{y}^2)\ \mathrm{dy}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{21}$$

Example: Evaluate the double integral $\int_0^5 \int_0^{x^2} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx$

Inner integration

$$\int_0^{x^2} (x^3 + xy^2)\, dy = \left[x^3 y + x\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} = \left(x^3(x^2) + x\frac{(x^2)^3}{3}\right) - (0+0) = x^5 + \frac{x^7}{3}$$

Outer integration

$$\int_0^5 \left(x^5 + \frac{x^7}{3}\right) dx = \int_0^5 x^5\, dx + \int_0^5 \frac{x^7}{3} dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^5 + \left[\frac{x^8}{3(8)}\right]_0^5$$

$$= \left(\frac{5^6}{6} - 0\right) + \left(\frac{5^8}{3(8)} - 0\right) = \frac{5^6}{6} + \frac{5^8}{24} = \frac{4(5^6) + 5^8}{24} = \frac{406250}{24}$$

$$\therefore \int_0^5 \int_0^{x^2} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx = \frac{406250}{24}$$

Example: Evaluate the double integral $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 r \sin\theta\, dr\, d\theta$

Inner integration

$$\int_0^2 r\sin\theta\, dr = \left[\frac{r^2}{2}\sin\theta\right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2}\sin\theta\right) - \left(\frac{0^2}{2}\sin\theta\right) = 2\sin\theta$$

Outer integration

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2[-\cos\theta]_{-\pi}^{\pi} = -2(\cos(\pi) - \cos(-\pi)) = -2\big(-1 - (-1)\big) = 0$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 r\sin\theta\, dr\, d\theta = 0$$

Example: Evaluate the double integral $\int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy\, dx$

Inner integration

$$\int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy = [e^{x+y}]_0^{\ln 3} = e^{x+\ln 3} - e^{x+0} = e^x \cdot e^{\ln 3} - e^x = 3e^x - e^x = 2e^x$$

Outer integration

$$2\int_0^{\ln 4} e^x\, dx = 2[e^x]_0^{\ln 4} = 2\big(e^{\ln 4} - e^0\big) = 2(4-1) = 2(3) = 6$$

$$\therefore \int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy\, dx = 6$$

Example: Evaluate the double integral $\int_1^2 \int_0^y x\sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy$

Inner integration

$$\int_0^y x\sqrt{y^2 - x^2}\,dx = \int_0^y x(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-2}\int_0^y -2\,x(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\left[\frac{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^y = \frac{-1}{3}\left[(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^y = \frac{-1}{3}\left(\left((y^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right) - \left((y^2 - 0)^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{3}\left((0) - \left((y^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right) = \frac{1}{3}y^3$$

Outer integration

$$\frac{1}{3}\int_1^2 y^3\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{12}[y^4]_1^2 = \frac{1}{12}(2^4 - 1^4) = \frac{1}{12}(16 - 1) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \int_1^2 \int_0^y x\sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy = \frac{5}{4}$$

Example: Evaluate the double integral $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dydx$

Inner integration

$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}[y^2]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 - \left(-\sqrt{4 - x^2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left((4 - x^2) - (4 - x^2)\right) = 0$$

Outer integration

$$\int_{-2}^2 0\,dx = 0\int_{-2}^2 dx = 0$$

$$\therefore \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dydx = 0$$