الطي	4	9	1800
التغليف	1	2	400
ربح وحدة الطول	12	8	

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A = X_1

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من المنتوج B = X_2

نموذج البرمجة الخطية:

$$\text{Max. } Z = 12\,X_1 + 8\,X_2$$

S.T.

$$8\,X_1 + 6\,X_2 \leq 2200$$
$$4\,X_1 + 9\,X_2 \leq 1800$$
$$1\,X_1 + 2\,X_2 \leq 400$$
$$X_1\,,\ X_2 \geq 0$$

ايجاد الحل الامثل بطريقة الرسم البياني:

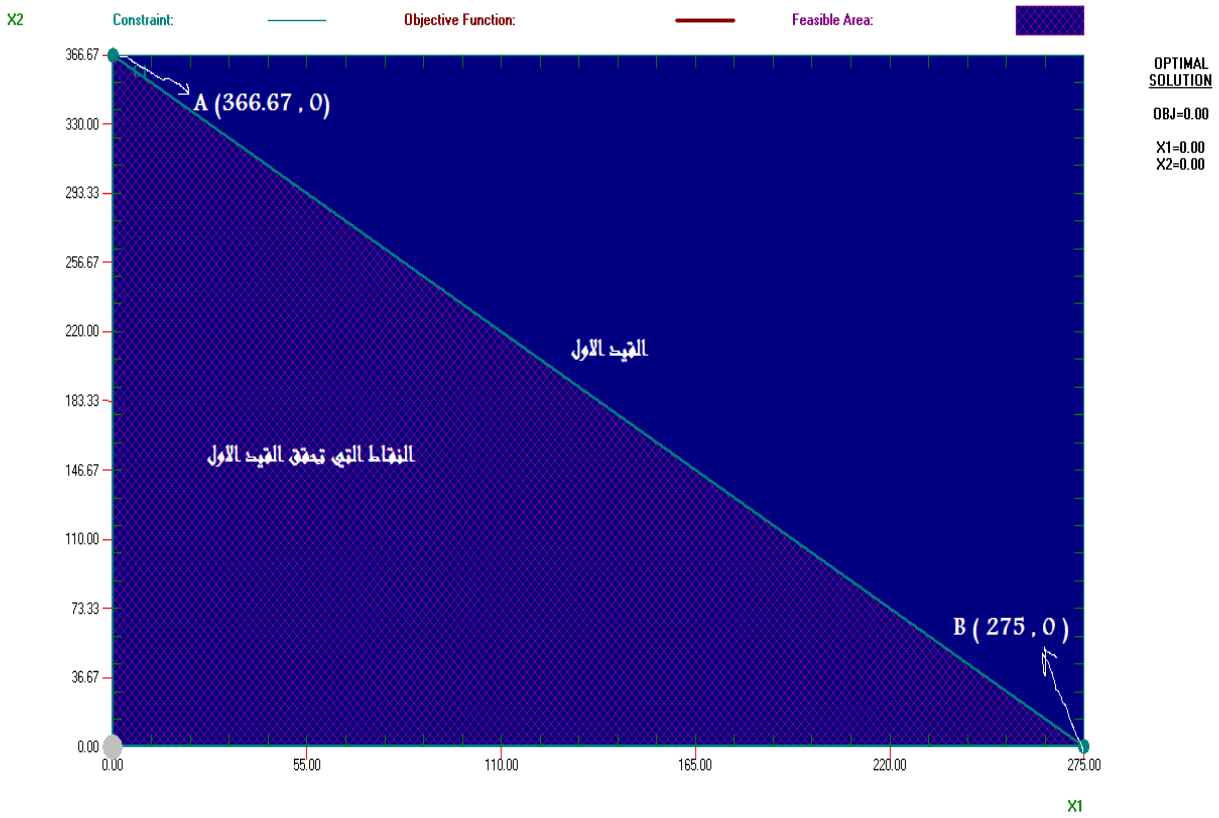
لغرض توضيح كيفية رسم القيود سيتم رسم كل قيد على المستوي بشكل منفصل وتحديد النقاط التي تحققه ثم بعد ذلك يتم رسم جميع القيود على المستوي:

رسم القيد الاول : يتم كتابته بهيئة معادلة : $8\,X_1 + 6\,X_2 = 2200$

يتم التعويض بقيمة الصفر للمتغير X_1 ثم نجد قيمة المتغير X_2 ، ثم بعد ذلك نعوض بقيمة الصفر للمتغير X_2 ثم نجد قيمة المتغير X_1 و كالاتي :

X_1	X_2
0	366.67
275	0

وبهذا نحصل على نقطتين هما (0 , 366.67) A و (275 , 0) B ، نثبت هاتين النقطتين على الاحداثيين وصل بينهما بخط مستقيم ثم نحدد النقاط التي تحقق هذا القيد وهي النقاط التي تحت الخط المستقيم والمحددة بالمحورين لان القيد بهيئة اقل او تساوي و في الربع الاول بسبب قيد عدم السلبية. وكما مبين في الرسم البياني الاتي:

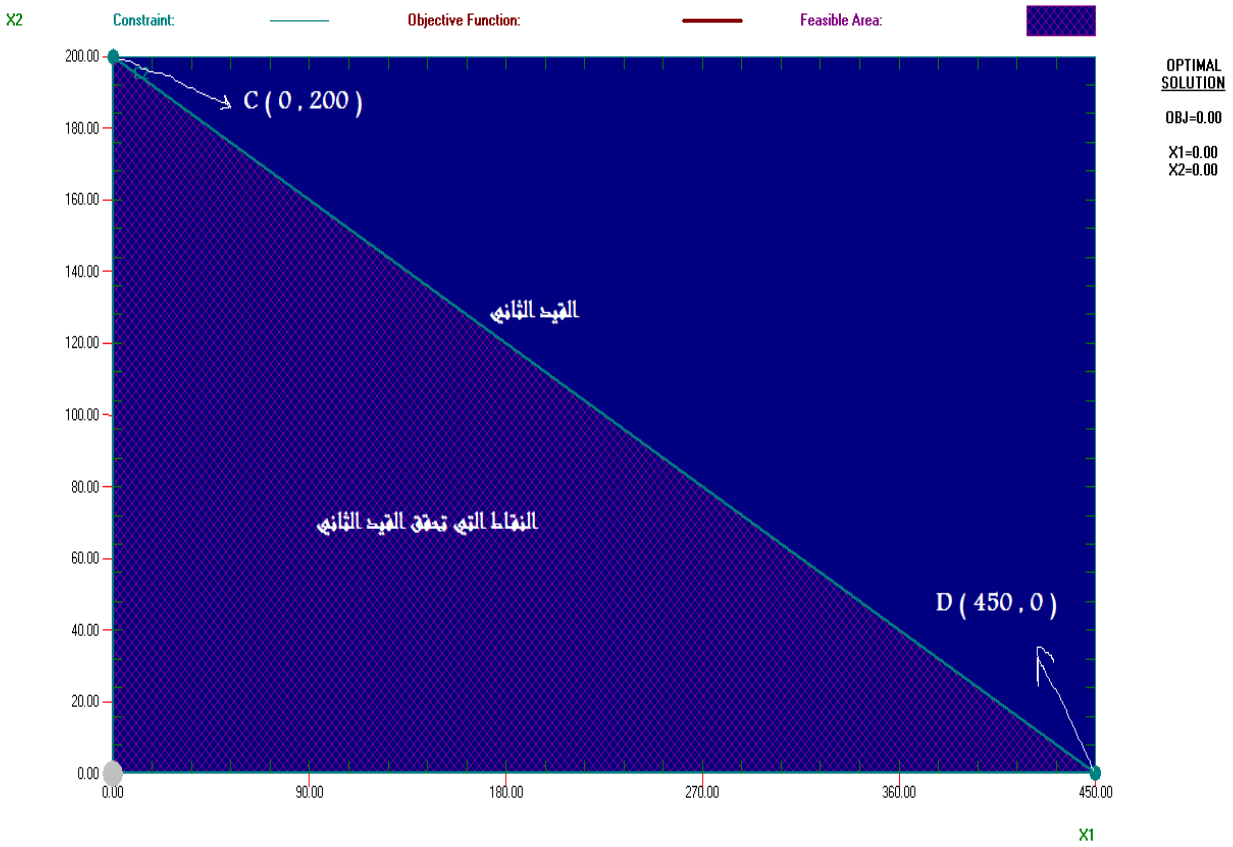


الرسم البياني للقيد الاول

بنفس الطريقة يتم رسم القيد الثاني : $4\,X_1 + 9\,X_2 = 1800$

X_2	X_1
200	0
0	450

ويتكون لدينا النقطتين (0 , 200) C و (450 , 0) D والرسم البياني للقيد كما مبين ادناه

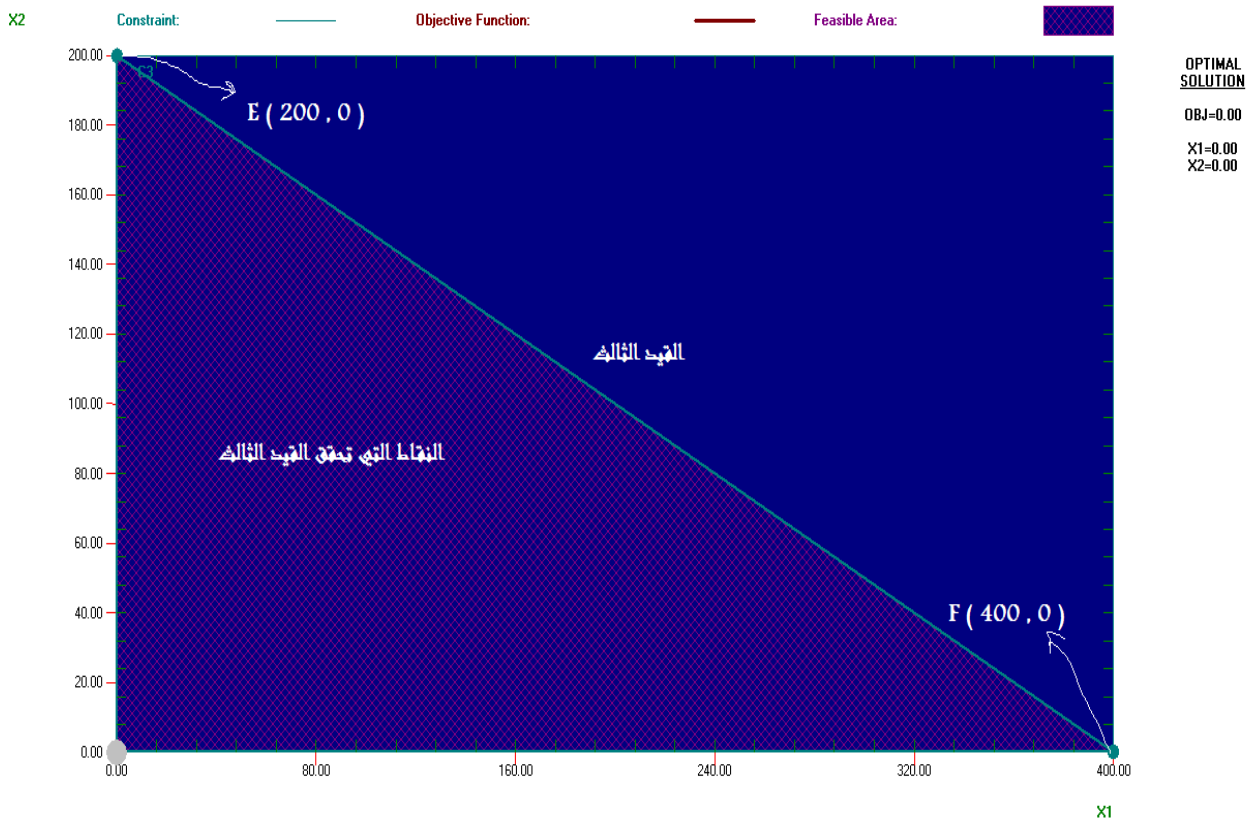


الرسم البياني للقيد الثاني

وكذلك يتم رسم القيد الثالث: $1\,X_1 + 2\,X_2 = 400$

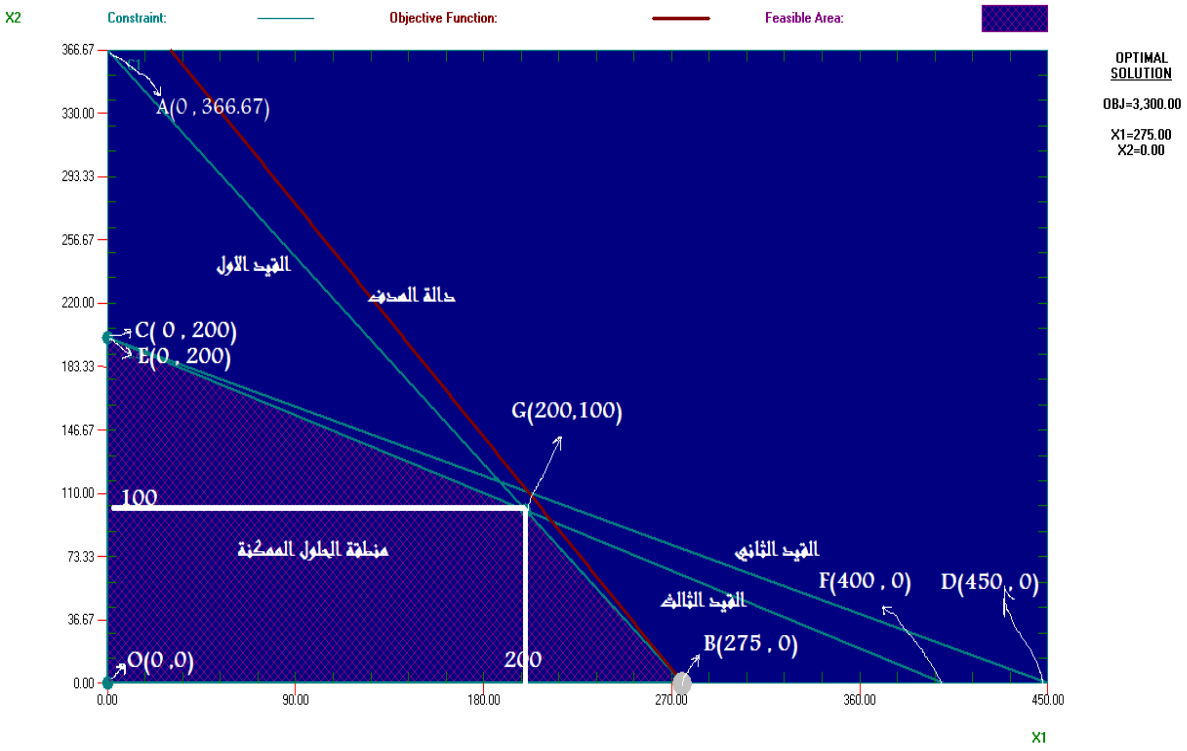
X_2	X_1
200	0
0	400

ويتكون لدينا النقطتين (0 , 200) E و (400 , 0) F والرسم البياني للقيد كما مبين ادناه



الرسم البياني للقيد الثالث

بعد توضيح رسم القيود بشكل منفرد سيتم رسمهم جميعا على المستوي وكما مبين في الرسم البياني التالي والذي يبين المنطقة المشتركة بين القيود الثلاثة (المنطقة المظللة) والتي تمثل منطقة الحلول الممكنة اذ ان كل نقطة تقع في هذه المنطقة تحقق قيود النموذج الثلاثة في آن واحد ، هذه المنطقة محدد بالنقاط المتطرفة OBGC ، لتحديد الحل الامثل يتم تعويض جميع النقاط الواقعة في منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف والنقطة التي تحقق اكبر قيمة لدالة الهدف هي التي تمثل الحل الامثل، غير ان هذه العملية غير ممكنة لذا نأخذ النقاط المتطرفة لمنطقة الحلول الممكنة ونعوض احداثياتها في دالة الهدف ثم نحدد النقطة التي تحقق اكبر قيمة لدالة الهدف (لكون دالة الهدف تأخذ صيغة التعظيم) .



الرسم البياني لقيود نموذج البرمجة الخطية والذي يبن منطقة الحلول الممكنة

نلاحظ ان جميع احداثيات النقاط المتطرفة محددة ماعدا النقطة G التي تمثل نقطة تقاطع القيد الاول مع القيد الثالث ، ويمكن تحديد احداثيات هذه النقطة بأسقاط عمود من نقطة التقاطع G على المحورين X_1 و X_2 كما مبين في الرسم اعلاه اذ نلاحظ ان $X_1 = 200$ و $X_2 = 100$ ، والطريقة الأدق في تحديد احداثيات نقطة التقاطع G هي بحل المعادلتين الممثلتين للقيدين الاول والثالث انيا لايجاد قيمة كل من X_1 و X_2 وكالاتي:

$$8 X_1 + 6 X_2 = 2200 \quad .....1$$

$$1 X_1 + 2 X_2 = 400 \quad ..... 2$$

من معادلة 2 نجد ان

$$X_1 = 400 - 2 X_2 \quad ..... 3$$

نعوض عن X_1 في المعادلة 1 ينتج

$$8 (400 - 2 X_2) + 6 X_2 = 2200$$

$$3200 - 16 X_2 + 6 X_2 = 2200$$

ومنها نحصل نحصل على

$X_2 = 100$

وبالتعويض عن X_2 نحصل على

$X_1 = 400 - 2\,(100) = 200$

اذن احداثيات نقطة تقاطع القيدين G هي (100 , 200) ، بعد ذلك نعوض احداثيات النقاط المتطرفة في دالة الهدف وكما مبين في الجدول الاتي:

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $Z = 12\,X_1 + 8\,X_2$
O (0 , 0)	$Z = 0$
B (275 , 0)	$Z = 12\,(275) + 0 = 3300$
G (200 , 100)	$Z = 12\,(200) + 8\,(100) = 3200$
C (0 , 200)	$Z = 0 + 8\,(200) = 1600$

ومن الجدول اعلاه نجد ان اكبر قيمة لدالة الهدف تحققها النقطة (0 , 275) B لذا فأنها تمثل الحل الامثل ، بمعنى ان الحل الامثل هو $X_1 = 275$ و $X_2 = 0$ واكبر قيمة لدالة الهدف هي 3300 دينار . أي ان البرنامج الامثل للانتاج هو انتاج 275 وحدة من المنتوج A فقط (لايتم انتاج اي وحدة من المنتوج B) بما يحقق اكبر ربح ممكن ويساوي 3300 دينار .

مثال (2):

ترغب احدى شركات تصنيع الاعلاف وضع برنامج خاص بانتاج العلف الحيواني اذ قررت انتاج نوعين من انواع العلف كل منهما يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال ، كلفة النوع الاول من العلف 41 دينار ، وكلفة النوع الثاني 35 دينار. يدخل في تركيب كل من نوعي العلف اربعة مواد غذائية ، يتطلب تصنيع العلف من النوع الاول مزج (2 ، 1 ، 5 ، 0.6) وحدة من المواد الغذائية (A , B , C , D) على التتابع. الاحتياجات الاسبوعية من المواد الغذائية (A , B , C , D) والمفروض كل نوع من العلفين توفرها للحيوان هي (1250 ، 250 ، 900 ، 232.5) كلغ على التتابع. المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة.

2- ايجاد البرنامج الامثل لانتاج النوعين من العلف الحيواني باستخدام طريقة الرسم البياني.

الحل:

نلخص بيانات المشكلة في الجدول الاتي:

المواد الغذائية الداخلة في تركيب العلف	نوع العلف		الاحتياجات الاسبوعية من المواد الغذائية(كغم)
	الاول	الثاني	
A	2	3	1250
B	1	1	250
C	5	3	900
D	0.6	0.25	232.5
كلفة الوحدة الواحدة من العلف (دينار)	41	35	

القرار يتعلق في تحديد الكمية المنتجة من كل نوع من نوعي العلف بما يحقق اقل كلفة ممكنة.

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من العلف الاول يساوي X_1 .

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من العلف الثاني يساوي X_2 .

صيغة النموذج الرياضي :

$$\text{Min. } Z = 41\,X_1 + 35\,X_2$$

$$\text{S.T.}$$

$$2\,X_1 + 3\,X_2 \geq 1250$$

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

$$5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 900$$

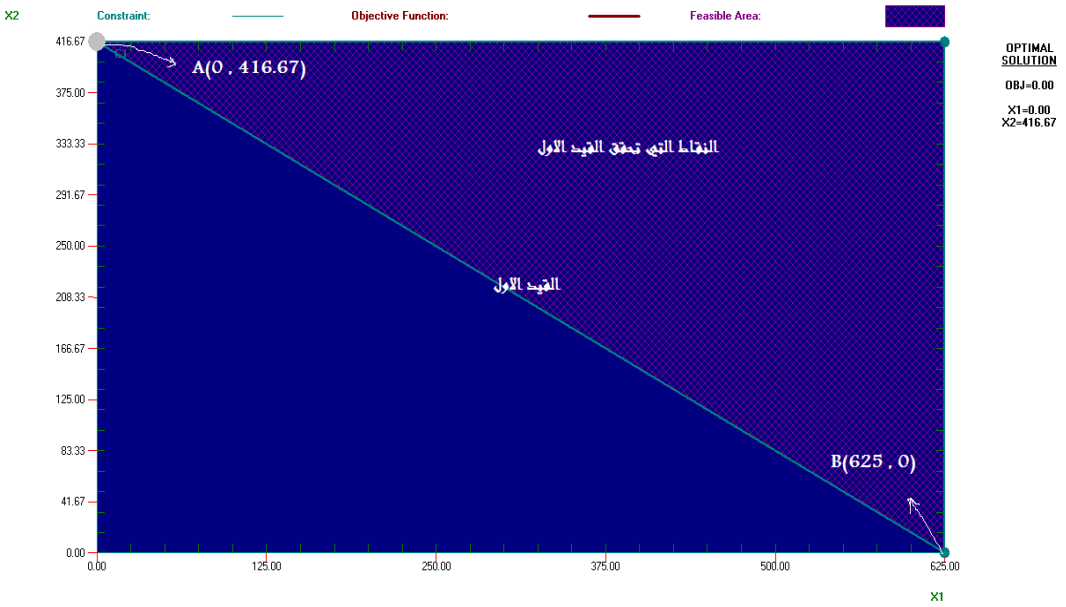
$$0.6\,X_1 + 0.25\,X_2 \geq 232.5$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ايجاد الحل الامثل بطريقة الرسم البياني:

رسم القيد الاول: $2\,X_1 + 3\,X_2 = 1250$

النقطة	X_1	X_2
A	0	416.67
B	625	0



شكل (1): الرسم البياني للقيد الاول

رسم القيد الثاني: $X_1 + X_2 = 250$

النقطة	X_1	X_2
C	0	250
D	250	0