Finding the inverse of a matrix using the Gaussian elimination

(ايجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة الحذف لكاوس)

يمكن ايجاد المعكوس للمصفوفة المربعة (nxn) بالاعتماد على كل من المصفوفة A ومصفوفة الوحدة I (identity matrix) وذلك باجراء بعض التحويلات الابتدائية (ملاحظة التحويلات تكون فقط على الصفوف)

$$[A_{n\times n} \mid I_{n\times n}] \xrightarrow[\text{تحويلات ابتدائية}]{} [I_{n\times n} \mid A^{-1}_{n\times n}]$$

Ex: Find the invers matrix using

1- The definition باستخدام التعريف

2- the elimination method of Gauss

sol:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$= (16+9+9)-(12+9+12) = 34-33 = 1 \neq 0$$

$$\alpha_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16-9 = 7$$

$$\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$\alpha_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12-9 = -3$$

$$\alpha_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

$$\alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-3 = 0$$

$$\alpha_{31} = -1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9-12 = -3$$

$$\alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-3 = 0$$

$$\alpha_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

$$\therefore cof = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow adj(A) = (cof(A))^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \star$$

الان طريقة الحذف لكاوس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow [A \vdots I] \longrightarrow [I \vdots A^{-1}]$$

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] -3R_2+R_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] -3R_2+R_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \star$$

Ex: find the invers matrix using:

1- The definition

2- The elimination method of Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{matrix} = (6+0+6)-(0+12+0) = 0$$

المحدد يساوي صفر اذن لا يوجد حل للسؤال

مثال مهم جداً

Ex1 prove the relation $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

where $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

sol الطرف الايسر

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

لان المصفوفة مثلثة عليا هو حاصل ضرب عناصر القطر

$\alpha_{11} = 2$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 0$

$\alpha_{21} = -22$, $\alpha_{22} = 8$, $\alpha_{23} = 0$

$\alpha_{31} = 33 - 9 = 24$, $\alpha_{32} = -12$, $\alpha_{33} = 4$

$$\operatorname{cof}(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -22 & 8 & 0 \\ 24 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 2 & -22 & 13 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore (AB)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A \cdot B)}{|A \cdot B|} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -22 & 13 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الطرف الايمن $B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = 2$$

$\alpha_{11} = 1 \qquad \alpha_{21} = -4 \qquad \alpha_{31} = 7$

$\alpha_{12} = 0 \qquad \alpha_{22} = 2 \qquad \alpha_{32} = -4$

$\alpha_{13} = 0 \qquad \alpha_{23} = 0 \qquad \alpha_{33} = 2$

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \longrightarrow |A| = 4$$

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 2$$

من المطابقة 1 و 2

$$\therefore B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جد المعكوس باستخدام

١- التعريف

٢- طريقة الحذف الكاوسي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad = 6 - 0 = 6 \neq$$ صفر

$\alpha_{11} = 6$ $\qquad \alpha_{22} = 2$

$\alpha_{12} = -4$ $\qquad \alpha_{23} = 0$

$\alpha_{13} = 0$ $\qquad \alpha_{31} = -6$

$\alpha_{21} = 0$ $\qquad \alpha_{32} = 3$

$\alpha_{33} = 3$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = 1/6 \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad *$$

طريقة التعريف

الان طريقة الحذف لكاوس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] -2R_1 + R_2$$