<u>الفصل الرابع</u>

التعديل الداخلي

Interpolating polynomials

اذا كان لدينا مجموعة منتهية من قيم دالة غير معروفة $f: f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n),$ ونريد تخمين قيمة الدالة عند نقطة ما x^* . فاذا كانت x^* واقعة ضمن مدى النقاط $\{x_i\}$ فان عملية التخمين تسمى بالاندراج وبعكس ذلك فان العملية تسمى عندئذ بالاستكمال وهناك طرق عديدة لايجاد هذه الدالة:

1- <u>طريقة الرسم</u> :- وهي من الطرق القديمة, وبالرغم من استخدامها في عملية تعديل الدالة فانها تعتبر طريقة ضعيفة.
2- <u>طريقة لاكرانج (Lagrange method)</u>:- وهي طريقة شائعة الاستعمال نحصل فيها على متعددة الحدود والتي تمثل تقريب جيد للدالة.

لتكن f دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$ ومعرفة عند النقاط x_0, x_1, x_2 اي ان

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

لتقدير قيمة الدالة f في نفطظة واحدة x^* فان صيغة لاكرانج تكتب بالشكل التالي

$$L_0(x^*) = \frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

اي ان

$$p(x^*) = L_0(x^*)f(x_0) + L_1(x^*)f(x_1) + L_2(x^*)f(x_2)$$

وبشك عام فان

$$f(x) \cong p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x - x_i} \right) \right\} f(x_j)$$

وتسمى هذه الصيغة بطريقة لاكرانج.

<u>ملاحظة</u>:- تستخدم هذه الطريقة للدوال متساوية وغير متساوية المسافة بين القيم.

مثال:- باستخدام طريقة لاكرانج جد قيمة الدالة

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	1	2	5

خمن الدالة عند $p(3), p(5)$

الحل:-

$$p(x^*) = L_0(x^*)f(x_0) + L_1(x^*)f(x_1) + L_2(x^*)f(x_2) + L_3(x^*)f(x_3)$$

$$L_0(x^*) = \frac{(x^*-x_1)(x^*-x_2)(x^*-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x^*-1)(x^*-2)(x^*-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

$$L_1(x^*) = \frac{(x^*-x_0)(x^*-x_2)(x^*-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x^*-0)(x^*-2)(x^*-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$

$$L_2(x^*) = \frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)(x^*-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x^*-0)(x^*-1)(x^*-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}$$

$$L_3(x^*) = \frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)(x^*-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x^*-0)(x^*-1)(x^*-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$\begin{aligned}\therefore p(x^*) = &-\frac{1}{8}(x^*-1)(x^*-2)(x^*-4) + \frac{1}{3}(x^*)(x^*-2)(x^*-4)\\ &-\frac{1}{2}(x^*)(x^*-1)(x^*-4) + \frac{5}{24}(x^*)(x^*-1)(x^*-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(3) &= -\frac{1}{8}(2)(1)(-1) + \frac{1}{3}(3)(1)(-1) - \frac{1}{2}(3)(2)(-1) + \frac{5}{24}(3)(2)(1)\\ &= \frac{1}{4} - 1 + 3 + \frac{5}{4} = \frac{14}{4} = 3.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(5) &= -\frac{1}{8}(4)(3)(1) + \frac{1}{3}(5)(3)(1) - \frac{1}{2}(5)(4)(1) + \frac{5}{24}(5)(4)(3)\\ &= -1.5 + 5 - 10 + 12.5 = 6\end{aligned}$$

مثال:- باستخدام طريقة لاكرانج جد قيمة الدالة

x	0	1	3	4
$f(x)$	-1	0	8	15

خمن الدالة عند $p(3.3)$

الحل:-

$$p(x^*) = L_0(x^*)f(x_0) + L_1(x^*)f(x_1) + L_2(x^*)f(x_2) + L_3(x^*)f(x_3)$$

$$L_0(x^*) = \frac{(x^*-1)(x^*-3)(x^*-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{-1}{12}(x^*-1)(x^*-3)(x^*-4)$$

$$L_1(x^*) = \frac{(x^*-0)(x^*-3)(x^*-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}(x^*)(x^*-3)(x^*-4)$$

$$L_2(x^*) = \frac{(x^*-0)(x^*-1)(x^*-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{-1}{6}(x^*)(x^*-1)(x^*-4)$$

$$L_3(x^*) = \frac{(x^*-0)(x^*-1)(x^*-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{1}{12}(x^*)(x^*-1)(x^*-3)$$

$$\therefore \quad p(x^*) = \frac{1}{12}(x^*-1)(x^*-3)(x^*-4) - \frac{8}{6}(x^*)(x^*-1)(x^*-4) + \frac{15}{12}(x^*)(x^*-1)(x^*-3) = x^2 - 1$$

$$p(3.3) = 9.89$$

3- حساب الفروقات المنتهية (Calculus of Finite Differences):-

لتكن لدينا مجموعة البيانات $x_0, x_1, \dots, x_n$ حيث ان $x_i = x_0 + ih, i = 0,1,\dots,n$ وان قيم الدالة عند هذه النقاط هي $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ على الترتيب ويمكن كتابتها على النحو التالي $y_0, y_1, \dots, y_n$ عندئذن يمكن تعريف الفرق الاول كما يلي

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 0,1,\dots,n-1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_0 &= \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0)\\ &= \Delta y_1 - \Delta y_0\\ &y_2 - y_1 - (y_1 - y_0)\\ &y_2 - 2y_1 - y_0\end{aligned}$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i+k-j}$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

مثال:- اكتب جدول الفروقات للدالة $f(x) = x^3$ علما ان $x = 0, 1, 2, 3, 4$

الحل:-

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	
2	8	19	18		
3	27	37			
4	64				