- صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 6 بيضاء وسبعة سوداء، سحبت كرة من الصندوق واذا كانت الكرة حمراء تعني النجاح وان أي لون اخر يعني الفشل، ما هي الدالة الاحتمالية *P.m.f.* لهذا التوزيع؟

$X \sim Ber\left(P = \frac{5}{18}\right) \quad ; \quad X = 0,1$

$$P(X) = P^x q^{1-x}$$

- صندوق يحتوي علة 18 كرة، إذا تم سحب كرة واحدة، ما هي *P.m.f.* لهذا التوزيع؟

$X \sim Un(n) \quad ; \quad X = 1,2,3, \dots ,18$

$$P(X) = \frac{1}{n} = \frac{1}{18}$$

- صندوق يحتوي كرات سحبت 5 كرات من الصندوق علماً ان عدد الكرات الكلية هي 18 كرة ، ما هي *P.m.f.* لهذا التوزيع؟

$X \sim b\left(n = 5, P = \frac{5}{18}\right)$

واذا كانت X تمثل الكرات الحمراء فإن

$$P(X = x) = C_x^n \ P^x q^{n-x} = \ C_x^5 \ (\frac{5}{18})^x (\frac{13}{18})^{5-x} \qquad X = 0,1,2,3,4,5$$

- تم الحصول على اول كرة حمراء في السحبة السادسة حيث ان X تمثل حالات الفشل.

$X \sim Ge\left(P = \frac{5}{18}\right) \quad ; \quad X = 0,1,2,3, \dots$

$$P(X) = Pq^x$$

Ex) let $x \sim Po(\lambda)$, and $P(X = 1) = \ 2\ P(X = 2)$; Find the value of λ

Sol)

$$P(X) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & ; \quad X = 0,1,2,3, \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$P(X = 1) = \ 2\ P(X = 2) \Longrightarrow \ \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = 2\ \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

$$\Longrightarrow e^{-\lambda} = \ e^{-\lambda}\lambda$$

$$\Longrightarrow \lambda = \ \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = 1$$

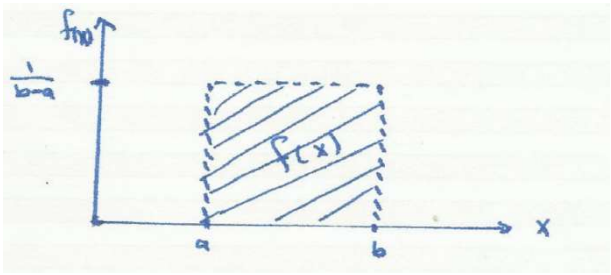
Some Continuous Distribution

3.1) Uniform Distribution:

A r.v. X is said to have uniform distribution in the interval [a,b] if its *p.d.f. (probability density function)* is given by:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < X < b \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Where (a) and (b) are real constants with $a < b$. the graph of $f(X)$ is shown in



Continuous Uniform distribution $x \sim Uc(a,b)$

a, b : are the parameters distribution.

ملاحظة:

التوزيع المنتظم المتقطع يحتوي على معلمة واحدة $x \sim Ud(n)$ معلمة التوزيع n ، اما التوزيع المنتظم المستمر يحتوي على معلمتين $x \sim Uc(a,b)$ معلمة التوزيع a, b علما ان معلمة التوزيع تمثل فترة $a < X < b$ للتوزيع .

To show that $f(X)$ is *p.d.f.* then: $\int_{-\infty}^{\infty} f(X)dx = 1$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}(X|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1 \quad \therefore \ is \ P.d.f.$$

The distribution function (D.f) or $F(X)$ is given by:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Then

$$F(X) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\int_a^x dt = \frac{1}{b-a}(t|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\therefore F(X) = \begin{cases} 0 & X < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le X < b \\ 1 & b \le X \end{cases}$$

Ex/

1- $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$

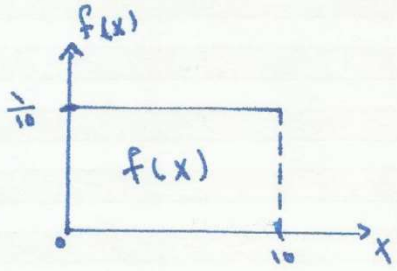
2- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 2 < x < 7 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

3- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 < x < 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$

Ex/ $X \sim UC(0, 10)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$



$f(x)$ is p.d.f if $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int_0^{10} dx = \frac{1}{10}(x)\Big|_0^{10} = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{is a p.d.f.}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & b \le x \end{cases} \quad \text{or} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

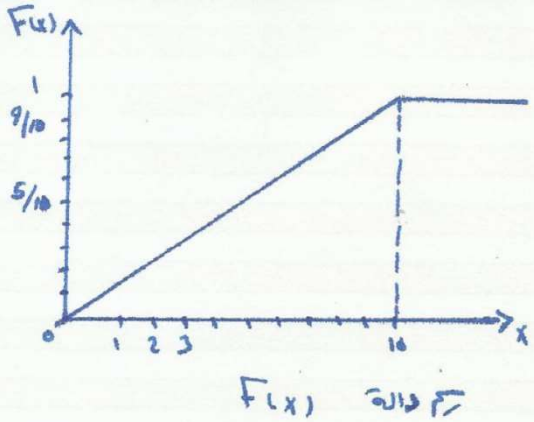
$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{10} & 0 \le x < 10 \\ 1 & 10 \le x \end{cases}$$

x	$F(x) = \frac{x}{10}$
0	0
1	1/10
2	2/10
3	3/10
4	4/10
5	5/10
⋮	⋮
10	1

1- $P(X<3) = \int_0^3 f(x)\,dx$

2- $P(X>6) = \int_6^{10} f(x)\,dx$

3- $P(3<X<8) = \int_3^8 f(x)\,dx$



F(x) دالة التوزيع

4- $P(|x|<8) = P(-8<x<8) = P(-8<x<0) + P(0<x<8)$

$= 0 + \int_0^8 f(x)\,dx$

Ex/ $X \sim Uc(-a, a)$; $P(X \le 1) = \frac{1}{7}$; Find the constant a?

Sol/ $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{a-(-a)} = \frac{1}{2a}$ $\quad -a<x<a$

$\because P(X \le 1) = \frac{1}{7}$

$\therefore \int_{-a}^{1} \frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2a}(x)\Big|_{-a}^{1} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2a}(1+a) = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{-5}{14} \Rightarrow a = -\frac{14}{10}$

Ex) Buses arrive at the bus stop at 10-minute intervals, starting at 6 Am that is arrive at { 6 , 6:10 , 6:20 , 6:30 , and so on }, if a passenger arrives at the bus stop at a time that is uniformly distributed between 6 and 6:20 , Find the probability that he waits for:

1) Less than 7 minutes for a bus?

2) More than 4 minutes for a bus?

دقائق انتظار الراكب

Sol) 6 , 6:10 , 6:20 , 6:30 , …

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 < X < 20 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$