مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int (x^2 + 2\,x - 5)^3 \cdot (x+1)\,\mathrm{d}x$$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$I = \frac{1}{2}\int (x^2 + 2\,x - 5)^3 \cdot (2\,x+2)\,\mathrm{d}x$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{(x^2 + 2\,x - 5)^4}{4} + \mathrm{C} = \frac{1}{8}((x^2 + 2\,x - 5)^4) + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int (3\,x^2 - 9\,x + 1)^{1/2} \cdot (2\,x - 3)\,\mathrm{d}x$$

الحل: بالضرب والقسمة على 3

$$I = \frac{1}{3}\int (3\,x^2 - 9\,x + 1)^{1/2} \cdot (6\,x - 9)\,\mathrm{d}x$$

$$I = \frac{1}{3}\frac{(3\,x^2 - 9\,x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \mathrm{C} = \frac{2}{9}\,(3\,x^2 - 9\,x + 1)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \frac{4\,x^3 + 5}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I = \int \left(\frac{4\,x^3}{x^2} + \frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 4\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 4\,\frac{x^2}{2} + 5\,\frac{x^{-1}}{-1} + \mathrm{C} = 2\,x^2 - \frac{5}{x} + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int (2\,x^3 - 6)^4 \cdot (6\,x^2)\,\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I = \frac{(2\,x^3 - 6)^5}{5} + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \sqrt{x^3 + 3\,x + 1} \cdot (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x$$

الحل: بالضرب والقسمة على 3

$$I = \frac{1}{3}\int (x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 3)\, \mathrm{d}x$$

$$I = \frac{1}{3}\ \frac{(x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{3}\ \frac{(x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}(x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \frac{2\,x^3 + 1}{x^4 + 2\,x + 1}\, \mathrm{d}x$$

الحل: بتطبيق القاعدة 7 ، نضرب ونقسم على 2

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2 \cdot (2\,x^3 + 1)}{x^4 + 2\,x + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{4\,x^3 + 2}{x^4 + 2\,x + 1}\, \mathrm{d}x$$

الان، القاعدة 7 جاهزة للتطبيق، وعليه

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^4 + 2\,x + 1| + C$$

الواجب : أحسب التكاملات الاتية:

$$\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{2 - t}{t^3}\, \mathrm{d}t$$

$$\int 3\,x \cdot \sqrt{1 - 2\,x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{5 - 2\,x^3}\, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{(y + 1)}{\sqrt{y^2 + 2y + 7}}\, \mathrm{d}y$$

التكامل المحدد The Definite Integral

مبرهنة (المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

لتكن f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، ولتكن F دالة بحيث أن لكل x في $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ ، فأن

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(x)\Big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}=\mathrm{F}(\mathrm{b})-\mathrm{F}(\mathrm{a})$$

مبرهنة: أذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن f قابلة للتكامل على الفترة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. أي أن التكامل المحدد $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ موجود.

ملاحظات:

- يطلق على $f(x)$ الدالة المكاملة (integrand) ، وعلى a الحد الأدنى وعلى b الحد الأعلى للتكامل المحدد $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- أذا كان التكامل المحدد $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ موجوداً فأن قيمته تكون وحيدة.
- أن عكس **المبرهنة** السابقة غير صحيح دائماً، فهناك دوال قابلة للتكامل على $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ولكنها غير مستمرة عليها.

خواص التكامل المحدد

- أذا كانت $f(\mathrm{a})$ موجودة، فأن $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$
- أذا كان $\mathrm{a}_2>\mathrm{a}_1$ ، والتكامل المحدد $\int_{\mathrm{a}_1}^{\mathrm{a}_2} f(x)\,\mathrm{d}x$ موجوداً، فأن

$$\int_{\mathrm{a}_2}^{\mathrm{a}_1} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\mathrm{a}_1}^{\mathrm{a}_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- أذا كانت f و g دالتين قابلتي التكامل على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (f(x)+\mathrm{g}(x))\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$$

- أذا كان k ثابتاً و f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{k}\,f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{k}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- أذا كانت f دالة قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وأن $f(x) \geq 0$ لكل x في $[a, b]$ ، فأن:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$$

- أذا كانت f و g دالتين قابلتي التكامل على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وكان $f(x) \geq g(x)$ لكل x في $[a, b]$ ، فأن:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

- أذا كانت f مستمرة على الفترة $[a, c]$ وكان $b \in (a, c)$ ، فأن:

$$\int_{a}^{c} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{c} f(x)\,dx$$

- أذا كان k ثابتاً ما، فأن:

$$\int_{a}^{b} k\,dx = k\,(b - 1)$$

مثال: أحسب ناتج التكامل المحدد $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)\,dx$

الحل:

$$\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x - 5)\,dx = x^3 - 2x^2 - 5x \Big|_{1}^{3}$$

$$= \left(3^3 - 2(3^2) - 5(3)\right) - \left(1^3 - 2(1^2) - 5(1)\right) = 0$$

مثال: أحسب ناتج التكامل المحدد $\int_{-2}^{0} \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt$

الحل:

$$\int_{-2}^{0} \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt = \int_{-2}^{0} t \cdot (1 + 2t^2)^{\frac{-1}{2}}\,dt$$

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} 4\,t \cdot (1 + 2t^2)^{\frac{-1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}\frac{(1 + 2t^2)^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2} + 1}\Big|_{-2}^{0} = \frac{2}{4}\sqrt{1 + 2t^2}\Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{2}{4} \cdot \left(\sqrt{1 + 2(0)} - \sqrt{1 + 2 \cdot (-2)^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{9}\right) = -1$$

مثال: أحسب التكامل الاتي $\int_{-1}^{2}|x|\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن

$$|x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$

فأن

$$\int_{-1}^{2}|x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x\,\mathrm{d}x = \frac{-x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$= -\left(0 - \left(\frac{(-1)^2}{2}\right)\right) + \left(\frac{2^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

مبرهنة: لتكن الدالة f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن

- أذا كانت f دالة زوجية، فأن

$$\int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\mathrm{a}} f(x)\ \mathrm{d}x$$

- أذا كانت f دالة فردية، فأن

$$\int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية، فأن

$$\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} x^2\ \mathrm{d}x = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{2}{3}(2^3 - 0) = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية، فأن $\int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = 0$

مثال: جد ناتج التكامل $\int_{-1}^{1}(x - x^3)\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن الدالة $f(x) = (x - x^3)$ دالة فردية، فأن $\int_{-1}^{1}(x - x^3)\,\mathrm{d}x = 0$

تطبيقات التكامل المحدد

هناك تطبيقات كثيرة للتكامل المحدد، فهو يستعمل في أيجاد مساحة منطقة بين مخططين، أيجاد حجوم الأجسام الدورانية، والمساحات السطحية للأجسام الدورانية، وأيجاد المسافة المقطوعة لجسم يتحرك بتعجيل في فترة زمنية معينة، وأيجاد الشغل، ومركز الثقل، وتطبيقات فيزيائية وهندسية وأحصائية كثيرة.

حساب المساحة باستعمال التكامل المحدد

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$. اذا كانت $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a, b]$ ، فأن المساحة A_a^b المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ تحسب كالاتي:

$$A_a^b = \int_a^b f(x)\ dx$$

اذا كانت $f(x) \leq 0$ على الفترة $[a, b]$ ، فأن المساحة A_a^b المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ تحسب كالاتي:

$$A_a^b = \left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \qquad \text{or} \qquad A_a^b = -\int_a^b f(x)\ dx$$

أذا وجد عدد c بين a و b أي أن $a < c < b$ بحيث أن $f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة $[a, c]$ و $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة $[c, b]$ ، فان المساحة A_a^b المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ تحسب كالاتي:

$$A_a^b = \int_a^c f(x)\ dx + \left|\int_c^b f(x)\, dx\right|$$

أذا وجد عدد c بين a و b أي أن $a < c < b$ بحيث أن $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة $[a, c]$ و $f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة $[c, b]$ ، فان المساحة A_a^b المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ تحسب كالاتي:

$$A_a^b = \left|\int_a^c f(x)\ dx\right| + \int_c^b f(x)\, dx$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 - 5$ ، محور السينات والمستقيمين $x = -1\ ,\ x = 2$.

الحل: بما أن $f(x) < 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[-1, 2]$ ، فأن المنطقة المطلوب أيجاد مساحتها تقع تحت محور السينات. أذاً

$$A_{-1}^2 = -\int_{-1}^2 f(x)\ dx = -\int_{-1}^2 (x^2 - 5)\ dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 5x\right) \Big|_{-1}^2$$

$$= -\left(\left(\frac{2^3}{3} - 5(2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 5(-1)\right)\right) = -\left(\frac{8}{3} - 10 + \frac{1}{3} - 5\right)$$

$$= -(-12) = 12$$

مثال: جد المساحة الكلية المحصورة بين مخطط الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ومحور السينات.

الحل: نحتاج لأيجاد نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور السينات. يتقاطع المنحني مع محور السينات اذا كان $f(x) = 0$. نضع $f(x) = 0$ ونوجد قيم x .

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2(x-3) - (x-3) = 0 \Longrightarrow (x^2-1)(x-3) = 0$$

$$\Longrightarrow (x+1)(x-1)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = -1, 1, 3$$

وعليه فأن مخطط الدالة يقطع محور السينات عند -1 , 1 , 3 .

نلاحظ ان $f(x) \geq 0$ في الفترة $[-1, 1]$ ، وان $f(x) \leq 0$ في الفترة $[1, 3]$. أي أن المنطقة الأولى R_1 تقع فوق محور السينات وتكون مساحتها A_{-1}^1 معطاة بـــ

$$A_{-1}^1 = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\ dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \ \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3}{3}1^3 - \frac{1^2}{2} + 3\,(1)\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3\,(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right) = 4$$

والمنطقة الثانية R_2 تقع تحت محور السينات وتكون مساحتها A_1^3

$$A_1^3 = -\int_1^3 f(x)\ dx = -\int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\ dx$$

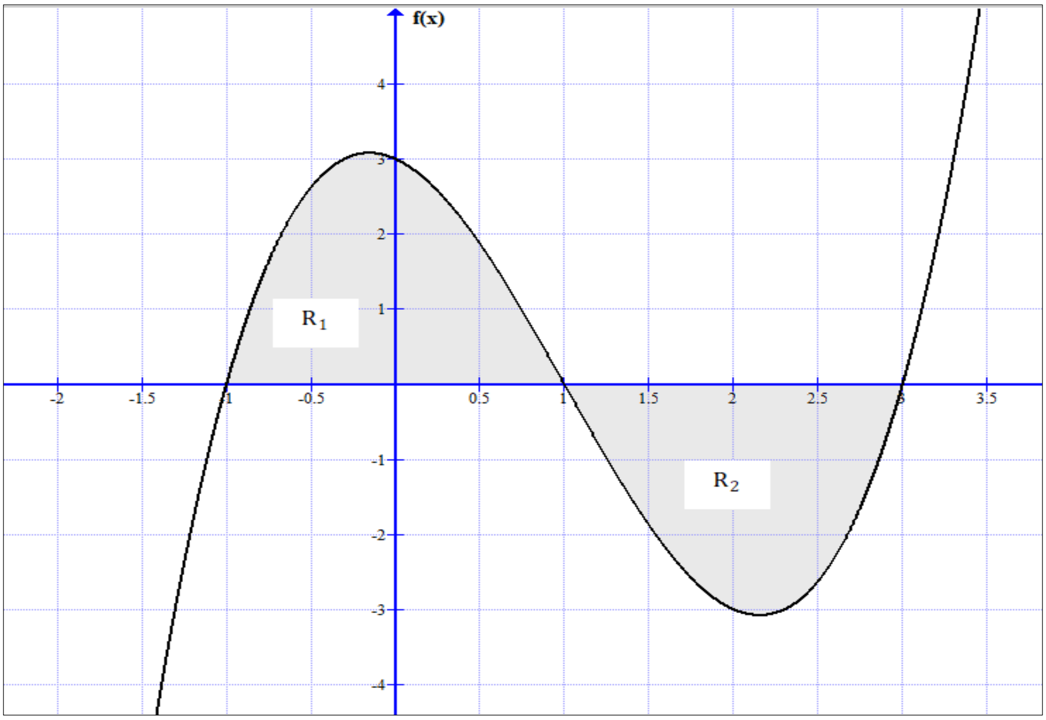
$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^3$$

$$= -\left(\left(\frac{3^4}{4} - \frac{3}{3}3^3 - \frac{3^2}{2} + 3\,(3)\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3}{3}1^3 - \frac{1^2}{2} + 3\,(1)\right)\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right)\right) = -(-4) = 4$$

أذاً، فالمساحة الكلية هي:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{-1}^{1} + \mathrm{A}_{1}^{3} = 8$$



مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = x^2$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 3\ ,\ x = 1$.

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = -x^2$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 2\ ,\ x = -2$.

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = -x^3$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 2\ ,\ x = -3$.

الحل: نلاحظ ان $f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[-3, 0]$. ونلاحظ أن $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[0, 2]$. لذلك

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{-3}^{0} + \mathrm{A}_{0}^{2}$$