تحليل الأخطاء :Analysis of Errors

لو فرضنا أن القيمة التي يُفترض ان يعطيها النظام الحقيقي بالمخرجات هي θ، اذ ان θ قد تكون معلومة القيمة أو مجهولة. ولو فرضنا ان لدينا المخرجات المستقلة $y_1, y_2, ..., y_n$ بوصفها بيانات حصلنا عليها من نموذج المحاكاة. من الناحية النظرية فان النموذج الرياضي المُعبّر عن العلاقة بين القيمة المفروضة θ والقيمة التجريبية y_i هو على النحو الآتي:

$$y_i = \theta + \varepsilon_i , i = 1,2,...,n$$

اذ ان ε_i هو خطأ عشوائي Random Error (أو ضوضاء Noise) معدله صفر وتباينه محدود. ان القيمة المطلقة من ε_i تعُرف **بالخطأ المطلق Absolute Error** للملاحظة y_i . أي ان :

$$A.E.(y_i) = |y_i - \theta|, i = 1,2,...n$$

ووحدة الخطأ المطلق هي وحدة كل من θ و y_i نفسها . أما **الخطأ النسبي Relative Error** للملاحظة y_i ، فيمثل نسبة الخطأ المطلق بالنسبة إلى القيمة المفروضة θ. أي ان :

$$R.E.(y_i) = \frac{A.E.(y_i)}{\theta} = \frac{|y_i - \theta|}{\theta} , i = 1,2,...,n$$

وكما هو واضح فان الخطأ النسبي مجرد من الوحدات. ان النسبة المئوية للخطأ النسبي تُعرف **بالخطأ المئوي Percentage Error**. أي ان :

$$P.E.(y_i) = R.E.(y_i) \times 100\%, i = 1,2,...,n$$

المثال:

نموذج محاكاة حاسوبي يقوم بفعالية لقياس قيمة معينة مجهولة θ. وعند تنفيذ البرنامج أعطى النتائج آلاتية بالمخرجات بوصفها قيماً تقديرية للمعلمة θ.

٢١٣ ٢١٦ ٢١٧ ٢١٤ ٢١٥

ما هي القيمة التقديرية للمعلمة θ والتي تجعل معدل مربع الخطأ اقل ما ممكن؟ حلل هذه المخرجات ثم احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل قيمة من قيم المخرجات.

الحل:

بعد إجراء الحسابات نجد ان $\hat{\theta} = \bar{y} = 215$. أما الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل قيمة فمبينة في الجدول الآتي.

i	y_i	$A.E(y_i)$	$R.E(y_i)$	$P.E(y_i)$
١	٢١٥	٠	٠	٠
٢	٢١٤	١	٠.٠٠٤٦٥	٠.٤٦٥%
٣	٢١٧	٢	٠.٠٠٩٣	٠.٩٣%
٤	٢١٦	١	٠.٠٠٤٦٥	٠.٤٦٥%
٥	٢١٣	٢	٠.٠٠٩٣	٠.٩٣%

قياس الكفاءة:

ان التباين Variance يقيس مقدار التباعد (التشتت) بين البيانات $x_1, x_2, ..., x_n$ عن معدلها $\bar{x}$، على وجه الخصوص فان التباين يمثل معدل مربعات انحرافات البيانات عن معدلها. فكلما كان التباين كبيراً، فان ذلك مؤشر على تشتت كبير بين البيانات، والعكس بالعكس. لهذا يُعد مقلوب التباين مقياسا مناسبا للكفاءة. ان **كفاءة Efficiency** لمقياس (متغير) معين X يمكن قياسها على النحو الآتي:

$$Eff(X) = \frac{1}{Var(X)} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{n-1}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}.$$

وكما هو واضح التناسب العكسي بين التباين والكفاءة: كلما كان التباين قليلاً، كانت الكفاءة عالية والعكس بالعكس.

ملاحظة:

١- عندما نُدخل عامل الزمن Time بالحسبان، يكون تعريف الكفاءة على النحو الآتي:

$$Eff(X) = \frac{1}{Var(X) \times Time}.$$

٢- عندما نريد ان نقيس كفاءة مقياس معين X بالنسبة إلى مقياس آخر Y، نستخدم **الكفاءة النسبية Relative Efficiency** للمقياس X بالنسبة للمقياس Y، نرمز لها R.E. (X/Y)، ونعرّفها بالشكل الآتي:

R.E. (X/Y)= $\frac{Eff\,(X)}{Eff\,(Y)}$.

وبـذلك تكـون **النسـبة المئويــة لمقـدار زيــادة كفــاءة المقيــاس X بالنسـبة للمقيــاس Y** ، R.E.(X-Y/Y)، على النحو الآتي:

$$R.E.(X-Y/Y)=\frac{Eff\,(X)-Eff\,(Y)}{Eff\,(Y)}\times!00\%.$$

المثال:

طريقتان، X وY، تم تطبيقهما لحساب قيمة معينة مجهولة θ. والجدول الآتي يبين مقدار التباين وزمن التنفيذ (ثانية) لكل من هاتين الطريقتين.

الطريقة	التباين	زمن التنفيذ (ثانية)
X	٢٤٦	١٢
Y	١٧٣	١٤

قارن بين كفاءة الطريقتين.

الحل:

$$Eff\,(X)=\frac{1}{Var(X)\times Time}=\frac{1}{246\times 12}=0.0003387.$$

$$Eff\,(Y)=\frac{1}{Var(Y)\times Time}=\frac{1}{173\times 14}=0.0004128.$$

وبما ان Eff(Y)>Eff(X)، لذا فان الطريقة Y أكثر دقة من الطريقة X، اذ ان الدقة النسبية للطريقة Y بالنسبة للطريقة X هي :

R.E. (Y/X)= $\frac{Eff\,(Y)}{Eff\,(X)}=1.219,$

أي حوالي ١٢١.٩%. كذلك فان النسبة المئوية لمقدار زيادة كفاءة الطريقة Y بالنسبة للطريقة X هي على النحو الآتي:

$$R.E.(Y-X/X)=\frac{Eff\,(Y)-Eff\,(X)}{Eff\,(X)}\times!00\%=21.9\%.$$

التحقق من صلاحية دالة التحويل:

بما ان النظام يُمثّل عادة بصندوق اسود Black Box تركيبه الداخلي غير معروف ويحوي "دالة رياضية" ،تقوم بتحويل المدخلات (المعطيات) إلى مخرجات، تسمى **دالة التحويل Transfer Function**. ولغرض اختبار مدى مطابقة هذه الدالة في نموذج المحاكاة الحاسوبي لمثيلتها في النظام الحقيقي، يتم اختيار عينة عشوائية من بيانات المدخلات وتعالج في نموذج المحاكاة الحاسوبي، ثم تُقارن بالمخرجات التي يعطيها، أو يُفترض ان يعطيها النظام الحقيقي لتلك المدخلات. بعد ذلك تُجرى اختبارات إحصائية Statistical Hypotheses لمعنوية الفرق بين المجموعتين. ان النجاح في مثل هذه الاختبارات مؤشر على التمثيل الجيد لنموذج المحاكاة الحاسوبي للنظام الحقيقي، أما الإخفاق فهو دليل على وجود خلل ما في النموذج التصوّري. لذا عند الإخفاق في مثل هذه الاختبارات يجب العودة إلى المرحلة الثالثة من مراحل بناء نموذج المحاكاة الحاسوبي لغرض معالجته من جديد.