المحاضرة-٦-

مولّدات الأعداد العشوائية Random Number Generators

تعد مسألة توليد أعداد عشوائية من المسائل الجوهرية في المحاكاة. لقد أهتم الباحثون في إيجاد مولّدات للإعداد العشوائية منذ الربع الاول من لقرن العشرين. وفيما يأتي استعراض تاريخي لأبرز الأعمال الرائدة في هذا المضمار:

* في السنة ١٩٢٧ نشر L. H. C. Tippet جدولا يضم ٤٠ ٠٠٠ عددٍ عشوائيٍ أُخذت من تقارير إحصاء ألسكان.

* في السنة ١٩٣٩ ابتكر M. G. Kendall و B. Babington-Smith ماكنة آلية لتوليد أعداد عشوائية ونشرا جدولا يضم ١٠٠ ٠٠٠ مرتبة عشرية.

*في السنة ١٩٤٦ أقترح J. Von Neumann طريقة أوسط التربيع Mid – Square Method لتوليد أعداد عشوائية.

* في السنة ١٩٥١ أوجد D. H. Lehmer طريقة التطابق الخطي Linear Congruential Method لتوليد أعداد عشوائية، وقد لاقت هذه الطريقة رواجا باهرا.

* في السنة ١٩٥٥ نشرت شركة RAND Corporation جدولا يتضمن مليون مرتبة عشرية تم الحصول عليها من ضوضاء الكتروني Electronic Noise.

* في السنة ١٩٦٥ اقترح M. D. Marclaren و G. Marsaglia ضم مولّدين من مولّدات التطابق.

* في السنة ١٩٨٩ اقترح R. S. Wikramaratna طريقة التطابق التجميعي Additive Congruential Method لتوليد أعداد عشوائية.

هناك من يستخدم مصطلح "**الأرقام**" بدل "**الأعداد**"، ونشير إلى ان الأرقام هي الرموز الكتابية للأعداد، والأرقام العربية التي ابتكرها العرب في بلاد المغرب العربي ودخلت من الأندلس إلى أوربا محدودة وعددها عشرة وهي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩. فرمز العدد سبعة يتكون من رقم واحد هو ٧، ورمز العدد سبعة وعشرين (٢٧) يتكون من رقمين هما الرقم ٧ ، والرقم ٢، وهكذا فرمز العدد يتكون من رقم أو مجموعة أرقام.

وان عدداً من الجوانب النظرية الأساسية المتعلقة بمولّدات الأعداد العشوائية. ونظرا لان مولّدات الأعداد العشوائية المتداولة تعتمد أساسا على مفهوم **المَقاس Modulo**،

الأعداد العشوائية Random Numbers:

العدد العشوائي Random Number هو عدد يتولد بطريقة المصادفة وخارج سيطرتنا وبحيث لا يمكن التنبؤ بقيمته إذا ما أعطيت الأعداد السابقة له. فلو تأملنا المتتابعة من الأعداد {٣,٦,٩,١٢,...} فان العدد الذي يلي ١٢ يمكن التنبؤ به مؤكداً لكي يكون ١٥، والعدد الذي يلي ١٥ يمكن التنبؤ به مؤكدا لكي يكون ١٨ وهكذا. لذا فان هذه المتتابعة من الأعداد هي متتابعة من الأعداد الحتمية Deterministic (غير العشوائية Non Stochastic). أما لو تأملنا المتتابعة {٣,١٧,٨,٢٥,...} فان العدد الذي يلي ٢٥ لا يمكن التنبؤ به تنبؤاً مؤكداً، كذلك الأعداد التي تلي هذا العدد لا يمكن التنبؤ بها تنبؤاً مؤكداً ، لهذا فان هذه المتتابعة تعد متتابعة من الأعداد العشوائية.

وحسب معجم الرياضيات لمؤلفيه يوروفسكي وبوروفان للسنة ١٩٩٥ فان الاعداد العشوائية هي **"متتابعة أعداد لها الخاصة العشوائية، اذ لا يمكن التنبؤ بأي عنصر انطلاقاً من العناصر التي تسبقه، وبوجه خاص لا يمكن لهذه الأعداد أن تكّون متوالية أو ان تتبع أي نمط منتظم أو متكرر**". ان الأعداد المولّدة بوساطة برمجيات Software مولّد عشوائي Random Number Generator لحاسوب لا تكون عشوائية فعلاً لان نمطها يتكرر دورياً، لذا يطلق عليها **أعداد عشوائية زائفة Pseudo Random Numbers**.

وكما سوف نلاحظ لاحقاً فان من المهام الأساسية للمحاكاة توليد الأعداد العشوائية والتي تتبع توزيعاً احتمالياً معيناً. ومن الأعداد العشوائية التي لها أهمية خاصة في المحاكاة هي الأعداد التي تتبع التوزيع المنتظم، أو **الأعداد العشوائية المنتظمة Uniform Random Numbers**. والأعداد العشوائية المنتظمة هي عبارة عن أعداد عشوائية لها احتمالية ثابتة ومتساوية للحدوث في مدة معينة. فعلى سبيل المثال لو أعيدت تجربة رمي زهر النرد رمياً متتالياً فان عدد النقاط الناتجة في كل محاولة سوف يكون بشكل أعداد عشوائية منتظمة هي احد الأعداد {١,٢,٣,٤,٥,٦} وان لكل من هذه الأعداد احتمالية ثابتة ومتساوية وهي $\frac{1}{6}$.

من الجوانب العملية الأساسية ذات العلاقة بالمحاكاة الحاسوبية هو اختيار العينه العشوائيه. فإذا أريد من عملية المحاكاة، أو ما يسمى بتجربة المحاكاة، النجاح في مهمتها، فيجب ان تتحقق الأسس النظرية التي ارتكزت عليها. وبقدر تعلق الأمر بتوليد الأعداد العشوائية، حيث من الضروري ان يتحقق مبدأ "**العشوائية**" في الأعداد المولّدة لكي تكون التجربة المحاكاتية بعيدة عن التحيّز وضمن الظروف المطلوبة. وهناك ملاحظتان اثنتان نود الإشارة إليهما عند القيام بأي تجربة محاكاة وهما:

١- يفضل إهمال القيم الأولية المولّدة بالمحاكاة لتجنب اعتمادها على العدد البذرة، مثلاً حذف أول ٢٠ عدداً مولّداً، وسوف نرمز بالحرف d لعدد الأعداد الأولية المراد حذفها.

٢- عندما يكون في تجربة المحاكاة تكرارات، أي ان التجربة تُعاد لمرات متعددة، فيُفضل إهمال عدد من الأعداد المولّدة (مثلا ٢٠ أو ٥٠) بين تكرار وآخر، وهذا ما يطلق عليه بالفجوة Gab، وسوف نرمز للفجوة بالحرف g.

مولّدات الأعداد العشوائية Random Number Generators:

يمكن توليد الأعداد العشوائية بالعديد من الطرائق ومنها:

١- من خلال إجراء تجربة عشوائية، مثل تجربة رمي قطعة نقود أو تجربة رمي زهر النرد (الزار). فعلى سبيل المثال إذا أردنا توليد أعداد عشوائية ثنائية، بشكل ٠ أو ١ فيمكننا ان نستخدم قطعة النقود لهذا الغرض وذلك بان نرمي قطعة النقود، فمثلا إذا ظهرت صورة نعدَّ العدد المولّد هو ٠، وإذا ظهرت كتابة نعدَّ العدد المولّد هو ١.

٢- **جداول الأعداد العشوائية:** ان جداول الأعداد العشوائية هي جداول خاصة موجودة في أغلب الكتب الإحصائية ويمكن الاستفادة منها للحصول على أعداد عشوائية وفق سياقات معينة. ان هذه الطريقة كانت سائدة حتى وقت قريب، إلا ان استخدامها الآن محدود نتيجة لما يقدمه الحاسوب من إمكانيات هائلة.

٣- **طريقة أوسط المربع The Mid-Square Method:**

٤- **طريقة أوسط الضرب The Mid-Product Method:**

المحاضرة-٧-

طريقة أوسط المربع The Mid-Square Method وهي من أوائل الطرائق المقترحة للاستخدام مع الحواسيب الرقمية، ولعل من أسباب شهرة هذه الطريقة ان الذي اقترحها هو الباحث المعروف John von Neumann السنة ١٩٤٦. ولتوضيح هذه الطريقة نفرض ان لدينا العدد ٨٢٣٤ ونريد ان نولّد منه أعداداً عشوائية صحيحة كل منها مؤلف من أربع مراتب عشرية. ان العدد الابتدائي الذي نبدأ بالتوليد منه يطلق عليه عادة اسم **العدد البذرة Seed Number** ويرمز له Xo ، في مثالنا هذا Xo=٨٢٣٤.

ان خوارزمية طريقة أوسط المربع تكون كما هي مبينة في أدناه:

الخوارزمية: توليد n من الأعداد العشوائية والمؤلفة كل منها من d من الرتب بطريقة أوسط المربع.

الخطوة (١): اختيار العدد البذرة Xo ذو d من المراتب العشرية.

الخطوة (٢): للقيم i=١,٢,٣,...,n نفذ الخطوتين (٣) و (٤).

الخطوة (٣): ربّع X_{i-1} كي تحصل على X_{i-1}^2 ذي ٢d من المراتب.

الخطوة (٤): خذ المراتب d الواقعة في منتصف العدد المولّد في الخطوة (٣) وذلك بقطع ٢٥% من طرفي المراتب كي ينتج العدد الجديد X_i ذو المراتب d.

وبتطبيق الخوارزمية السابقة على المثال المذكور آنفا نجد ان X_o=٨٢٣٤ وان $X_o^2 = 67798756$. وما دام عدد مراتب العدد العشوائي المطلوب هو d=٤ لذا فإننا نختار X_1=٧٩٨٧. وبتكرار هذه العملية نحصل على المتتابعة آلاتية من الأعداد العشوائية ذوات الأربع مراتب عشرية {٧٩٨٧, ٧٩٢١, ٧٤٢٢, ٠٨٦٠,...} . ان الميزة الايجابية لهذه الطريقة أنها سريعة وسهلة الاستخدام. أما سلبياتها فهي:

أ- ان الأعداد المولّدة بهذه الطريقة لا تنجح عادة في اختبار عشوائية الأعداد Test of Randomness.

ب- ان طول الدورة يعتمد على قيمة العدد البذرة X_o.

ت- تتميز هذه الطريقة بالتحيز، اذ تقترب الأعداد المولّدة من الصفر نتيجة التربيع. مثلا لو كانت $d=2$ و $X_0=03$ لذا فان $X_0^2 = 0009$ مما يؤدي إلى اختيار $X_1=00$، وبالنتيجة سوف تكون جميع الأعداد التالية بالتوليد أصفاراً.

المحاضرة-٨-

طريقة أوسط الضرب The Mid-Product Method:

وهذه الطريقة مشابهة لطريقة أوسط المربع ونوجزها بالخوارزمية الآتية:

الخوارزمية : توليد n من الأعداد العشوائية والمؤلفة كل منها من d من المراتب بطريقة أوسط الضرب.

الخطوة (١): اختيار العددين البذرة X_o و $X_١$ كل منهما مؤلف من d من المراتب العشرية.

الخطوة (٢): للقيم $i=١,٢,٣,\dots,n+١$ نفذ الخطوتين (٣) و (٤).

الخطوة (٣): اضرب $X_{i-١}$ و X_i لتحصل على العدد $X_iX_{i-١}$ والمؤلف من $٢d$ من المراتب.

الخطوة (٤): خذ المراتب d الواقعة في منتصف العدد المولّد في الخطوة (٣) وذلك بقطع ٢٥% من طرفي المراتب كي ينتج العدد الجديد $X_{i+١}$ ذو المراتب d .

ان هذه الطريقة تعطي أعداداً ذوات طول دورة أكبر من طريقة أوسط المربع واقل تحيزاً، إلا ان سلبيات طريقة أوسط التربيع لا تزال موجودة في هذه الطريقة.

المثال:

استخدم طريقة أوسط الضرب لتوليد عشرة أعداد عشوائية ذوات مرتبتين عشريتين مستخدما العددين البذرة $X_{.}=١٢$ و $X_١=٥٣$.

الحل:

$X_oX_١=١٢\times٥٣$

$=٠٦٣٦ \quad , \therefore X_٢=٦٣$

$X_١X_٢=٣٣٣٩ \quad , \therefore X_٣=٣٣$

$X_٢X_٣=٢٠٧٩ \quad , \therefore X_٤=٠٧$

$X_٣X_٤=٠٢٣١ \quad , \therefore X_٥=٢٣$

$X_٤X_٥=٠١٦١ \quad , \therefore X_٦=١٦$

$X_٥X_٦=٠٣٦٨ \quad , \therefore X_٧=٣٦$

$X_٦X_٧=٠٥٧٦ \quad , \therefore X_٨=٥٧$

$X_{٧}X_{٨}=٢٠٥٢ \quad , \therefore X_{٩}=٠٥$

$X_{٨}X_{٩}=٠٢٨٥ \quad , \therefore X_{١٠}=٢٨$

$X_{٩}X_{١٠}=٠١٤٠ \quad , \therefore X_{١١}=١٤$

وبذلك تكون الأعداد العشوائية المولّدة على النحو الآتي:

{٦٣, ٣٣, ٧, ٢٣, ١٦, ٣٦, ٥٧, ٥, ٢٨, ١٤}.