الشيطان يكمن في التفاصيل، فتنفيذ الأساليب الاستدلالية الفعالة وتقنيات الحدود أمر بالغ الأهمية لتحقيق النجاح.

7.طرق قطع الطائرة

طرق قطع المستوى في برمجة الأعداد الصحيحة

المنظور الهندسي

من وجهة نظر هندسية، تخيل المنطقة الممكنة لمشكلة برمجة الأعداد الصحيحة باعتبارها متعدد السطوح محدبًا في الفضاء ذي الأبعاد n. يتوافق كل جانب من جوانب متعدد السطوح هذا مع قيد عدم المساواة الخطية. الهدف هو العثور على نقطة عدد صحيح داخل هذا الشكل المتعدد السطوح الذي يعمل على تحسين الدالة الموضوعية.

تبدأ طرق مستوى القطع بالاسترخاء الأولي لقيود الأعداد الصحيحة، مما يؤدي إلى حل كسري. بعد ذلك، يضيفون بشكل متكرر مستويات القطع (قيود إضافية) لتشديد الاسترخاء حتى يتم الحصول على حل عدد صحيح. يتم اشتقاق مستويات القطع هذه من المتباينات الصحيحة التي تساعد في استبعاد الحلول الكسرية.

> ###قوي 2.<وجهة نظر جبرية

جبريًا، تتضمن طرق القطع المستوية حل سلسلة من عمليات الاسترخاء في البرمجة الخطية (LP). في كل تكرار، نقوم بحل مسألة LP للحصول على حل كسري. إذا انتهك هذا الحل أي قيد من الأعداد الصحيحة، فإننا نحدد المتباينة المنتهكة (مستوى القطع) ونضيفها إلى المشكلة. تستمر هذه العملية حتى يتم العثور على حل عدد صحيح.

3. ###توليد طائرات القطع

توجد عدة تقنيات لتوليد طائرات القطع:

تقطيعات جوموري :سميت على اسم عالم الرياضيات رالف إي. جوموري، وتستند هذه التقطيعات إلى ملاحظة أن الحل الأمثل لاسترخاء LP غالبًا ما يقع على حدود المنطقة الممكنة. يتم اشتقاق قطع جوموري من المكونات الكسرية للحل الأمثل.

تخفيضات شفاتال-جوموري :تعمل هذه التخفيضات على تعميم تخفيضات جوموري من خلال مراعاة قيود متعددة في وقت واحد. وهي فعالة بشكل خاص في حل المشكلات ذات المتغيرات ذات الأعداد الصحيحة المختلطة.

عدم المساواة في التغطية :تنشأ عدم المساواة في التغطية من مفهوم مجموعات التغطية. إذا كانت مجموعة من المتغيرات تغطي قيدًا ما، فيمكننا استخلاص متباينة صحيحة. على سبيل المثال، في مشكلة التغطية المحددة، تساعد عدم المساواة في التغطية على تشديد عملية الاسترخاء.

> ###قوي 4.<أمثلة عملية

دعونا نوضح طرق قطع الطائرة مع الأمثلة:

مشكلة حقيبة الظهر: بالنظر إلى مجموعة من العناصر ذات الأوزان والقيم، ابحث عن المجموعة الأكثر قيمة من العناصر التي تتناسب مع قيد الوزن. يمكن أن تساعد مستويات القطع في تعزيز الاسترخاء عن طريق إضافة متباينات صحيحة بناءً على مجموعات فرعية من العناصر.

مشكلة البائع المتجول (TSP): في TSP ، الهدف هو العثور على أقصر جولة تزور جميع المدن مرة واحدة بالضبط. يمكن استخلاص مستويات القطع من قيود إزالة الجولات الفرعية، مما يضمن بقاء الحل ممكنًا.

البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة المختلطة (MILP): تعد مستويات القطع ضرورية لحل مشكلات MILP. أنها تعزز استرخاء LP ، مما يؤدي إلى تقارب أسرع.

###الاستنتاج

تعمل طرق القطع المستوي على سد الفجوة بين البرمجة الصحيحة والبرمجة الخطية. ومن خلال إضافة القيود بحكمة، فإنهم يوجهون البحث عن حلول الأعداد الصحيحة. سواء كنت تعمل على تحسين سلاسل التوريد أو جداول الإنتاج أو تصميم الشبكة، فإن فهم أساليب القطع المسطحة يمكّنك من معالجة المشكلات المعقدة بكفاءة.

تذكر أن الرحلة من الاسترخاء الجزئي إلى الأمثلية للأعداد الصحيحة مرصوفة بمستويات متقطعة - كل واحدة منها تعمل على تحسين فهمنا لمساحة الحل وتقربنا من نقطة الأعداد الصحيحة المراوغة.

8. تطبيقات برمجة الأعداد الصحيحة

1. ***تخطيط وجدولة الإنتاج***:

في التصنيع وإدارة سلسلة التوريد، تساعد الملكية الفكرية على تحسين جداول الإنتاج وتخصيص الموارد وإدارة المخزون. على سبيل المثال، لنفترض مصنعًا ينتج منتجات مختلفة على أجهزة متعددة. يمكن لـ IP تحديد كميات الإنتاج المثالية وتعيينات الماكينات وجداول التسليم لتقليل التكاليف أو تعظيم الأرباح.

مثال: تريد شركة تصنيع سيارات تخصيص فترات إنتاج لنماذج مختلفة من السيارات على خطوط التجميع. يمكن أن تساعد برمجة الأعداد الصحيحة في العثور على أفضل مجموعة من النماذج لتلبية الطلب مع تقليل تكاليف التغيير.

2. ***تصميم الشبكة وتوجيهها***:

تلعب الملكية الفكرية دوراً حاسماً في تصميم شبكات النقل والاتصالات الفعالة. سواء أكان الأمر يتعلق بتوجيه شاحنات التوصيل، أو تصميم شبكات الاتصالات، أو تخطيط خطوط الطيران، فإن IP يساعد على تحسين تدفق البضائع أو المعلومات أو الأشخاص.

مثال: تريد إحدى شركات البريد السريع تحديد طرق التسليم الأكثر فعالية من حيث التكلفة لأسطولها من الشاحنات. يمكن للبرمجة الصحيحة تحسين المسارات، مع الأخذ في الاعتبار عوامل مثل المسافة ونوافذ وقت التسليم وسعة السيارة.

3. ***تحسين المحفظة***:

يواجه المستثمرون في كثير من الأحيان التحدي المتمثل في اختيار محفظة من الأصول (الأسهم والسندات وما إلى ذلك) **لتحقيق أقصى قدر من العائدات** مع الالتزام بالقيود (مثل الميزانية وتحمل المخاطر). يمكن لنماذج الملكية الفكرية التعامل مع القرارات المنفصلة (الشراء/البيع) والمساعدة في إنشاء المحافظ المثالية.

مثال: يريد مدير صندوق استثماري تخصيص الأموال عبر أسهم مختلفة. يمكن للبرمجة الصحيحة العثور على المزيج الأمثل من **الأسهم لتحقيق أقصى قدر** من العوائد المتوقعة مع البقاء في حدود الميزانية.

4. ***تقليل مشاكل المخزون***:

تتعامل الصناعات مثل تصنيع الورق وإنتاج الصلب وقطع المنسوجات مع المواد الخام (اللفائف والألواح) التي يجب تقطيعها إلى قطع أصغر (اللفائف والألواح والأنماط). يساعد IP على تقليل النفايات من خلال تحديد أنماط القطع المثالية.

مثال: يريد أحد مصانع الورق قطع لفات كبيرة من الورق إلى لفات أصغر ذات عروض مختلفة لتلبية طلبات العملاء .يمكن للبرمجة الصحيحة العثور على خطة القطع الأكثر كفاءة لتقليل بقايا النفايات.

5. ***جدولة المشروع والجدول الزمني***:

يساعد IP في جدولة المهام وتخصيص الموارد والوفاء بالمواعيد النهائية .سواء أكان الأمر يتعلق بإدارة المشروع، أو الجدول الزمني للدورة، أو جدولة مناوبات الموظفين، يضمن IP الاستخدام الفعال للموارد.

مثال: تحتاج الجامعة إلى إنشاء جدول زمني للفصل الدراسي مع الأخذ في الاعتبار توفر الغرف وتفضيلات أعضاء هيئة التدريس ومتطلبات المقرر الدراسي للطلاب. يمكن للبرمجة الصحيحة **إنشاء جدول زمني مثالي** يقلل من التعارضات.

6. ***موقع المنشأة وتخطيطها***:

عند تحديد مكان تحديد المرافق (على سبيل المثال، المستودعات والمستشفيات والمدارس)، تساعد الملكية الفكرية على تحقيق التوازن بين العوامل مثل تكاليف النقل وتغطية الطلب وقدرات المنشأة.

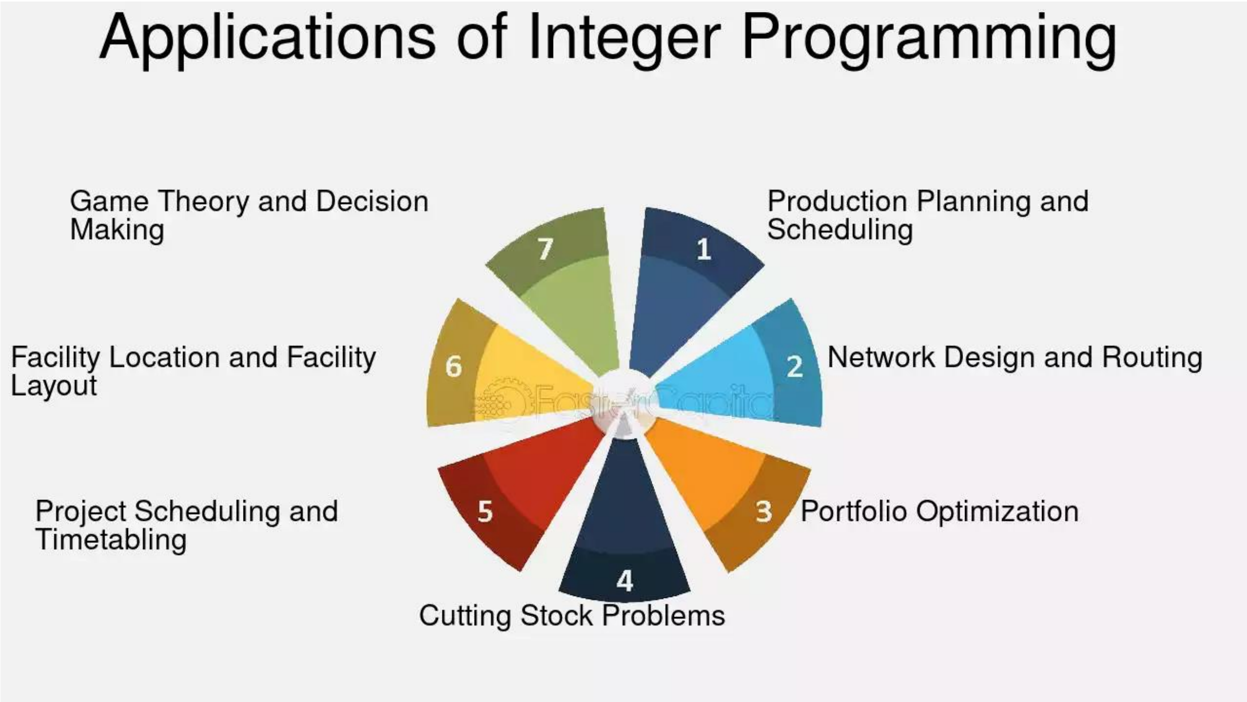
مثال: تريد سلسلة بيع بالتجزئة فتح متاجر جديدة مع تقليل تكاليف النقل الإجمالية من مراكز التوزيع. يمكن للبرمجة الصحيحة تحديد أفضل المواقع للمتاجر الجديدة.

7. ***نظرية اللعبة واتخاذ القرار***:

تُستخدم نماذج الملكية الفكرية في نظرية اللعبة لتحليل التفاعلات الإستراتيجية بين اللاعبين. سواء كان الأمر يتعلق بالمزايدة في المزادات، أو تخصيص الموارد في السيناريوهات التنافسية، أو تشكيل التحالف، فإن الملكية الفكرية توفر رؤى.

مثال: في مزاد الطيف، تقدم شركات الاتصالات عطاءات للحصول على نطاقات التردد. يمكن أن تساعد برمجة الأعداد الصحيحة في تصميم قواعد المزاد وتخصيص الترددات بكفاءة.

هذه الأمثلة لا تخدش سوى سطح تطبيقات IP. من جدولة الألعاب الرياضية إلى تجميع تسلسل الحمض النووي، ومن قائمة الطاقم إلى ألغاز سودوكو، تستمر برمجة الأعداد الصحيحة في التأثير على حياتنا بطرق غير متوقعة. إن تعدد استخداماته وقدرته على التعامل مع القرارات المنفصلة يجعله أداة قيمة لحل مشكلات التحسين المعقدة. لذلك، في المرة القادمة التي تواجه فيها مشكلة تتعلق بقيود الأعداد الصحيحة، تذكر أن IP قد يحمل مفتاح الحل الأمثل!



الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

تطرقنا من خلال الفصل الأول الى عرض مختصر لمبادئ البرمجة الخطية وطرق حل البرامج الخطية، تحت عدة فرضيات من بينها فرضية أو مبدأ التجزئة، والذي يعني أنه يمكن لقيم المتغيرات الأساسية أن تأخذ أي قيم حقيقية مستمرة موجبة. لكن في العديد من الحالات نجد أنه يجب أن تكون قيم هذه المتغيرات عند الحل الأمثل قيم عددية صحيحة، فمثلا في مسألة تتعلق بمخطط إنتاج أمثل لورشة لصناعة الطاولات والكراسي يقودنا إلى إنتاج 156.33 طاولة و742.5 كرسي غير مقبول، كون أن العدد العشري في هذه الحالة ليس له معنى اقتصادي بحيث لا يمكن انتاج 0.33 طاولة أو نصف كرسي.

ولتجاوز هذه المشكلة قد يقترح البعض تقريب هذه القيم إلى أقرب عدد صحيح (مثلا إنتاج 156 طاولة و742 كرسي)، لكن هذه الطريقة لا تضمن لنا أن يكون هذا الحل حلا أمثل (لأنه قد لا يحترم أحد قيود البرنامج وخاصة إذا كان أحد القيود معادلة)، بالإضافة إلى ذلك قد يكون هناك حلا آخر ذو أعداد صحيحة و أفضل من هذا الحل المقرب (فمثلا قد يكون الحل الأمثل هو إنتاج 152 طاولة و 746 كرسي) ، وحتى إذا تجاوزنا هذه المشاكل فهناك بعض الحالات أين يستحيل معها تقريب القيم إلى أعداد صحيحة و خاصة إذا كان أحد أو بعض المتغيرات الأساسية للنموذج متغيرات ثنائية من نوع (0،1).

وبما أن نماذج البرمجة الخطية تضمن فقط عدم سلبية المتغيرات في حين أننا نشترط في هذه النماذج أن تكون بالإضافة إلى عدم السلبية أعداد صحيحة، فإننا بحاجة إلى طرق و تقنيات جديدة تأخذ هذا الشرط الجديد بعين الاعتبار في عملية البحث عن الحل الأمثل، ويصبح عندئذ الهدف هو تحديد القيم المثلى للمتغيرات الاساسية في شكل عددي صحيح.

وبناءا على ذلك نقول أن برمجة الأعداد الصحيحة هي برمجة خطية مضاف اليها شرط العدد الصحيح لقيم المتغيرات عند الحل الأمثل بحيث يضاف الى شرط عدم سالبية المتغيرات شرط العدد الصحيح.

ومن خلال هذا الفصل سوف نستعرض أمثلة عن بعض أهم تطبيقات هذا النوع من البرمجة، ثم نستعرض أهم الطرق المستعملة في حلها.

1. الشكل العام لنماذج برمجة الأعداد الصحيحة:

هو عبارة عن نموذج برمجة خطية مضافا إليه شرط العدد الصحيح لأحد أو بعض أو كل المتغيرات

$$Max\ /\ Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

الأساسية:

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\leq,=,\geq) b_i & ; i = 1,2,\dots,m \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = 1,2,\dots,n & (1-2) \\ x_j \ entier, \quad j = 1,\dots,p \quad (p \leq n) & \end{cases}$$

يتضح من هذا الشكل للبرنامج الخطي أنه الفرق الوحيد بينه وبين شكل البرنامج المدروس في الفصل الاول هو الشرط الأخير المتمثل في شرط أن تكون متغيرات القرار أعداد صحيحة. ويمكن التمييز بين حالتين لهذا النوع من البرامج، حالة ($p = n$) في الشرط الأخير ويسمى النموذج عندئذ نموذج برمجة الأعداد الصحيحة، وحالة ما إذا كان ($p < n$) يسمى نموذج برمجة أعداد صحيحة جزئي بحيث يشترط فيه ان تكون بعض المتغيرات فقط أعداد صحيحة والبعض الآخر يمكن ان يكون غير صحيح.

2. طرق حل نماذج برمجة الأعداد الصحيحة:

1.2 الطريقة البيانية لحل نموذج برمجة الأعداد الصحيحة :

من أجل توضيح طريقة الحل البيانية لهذا النوع من النماذج سوف نستعين بالمثال التالي و هو نموذج برمجة أعداد صحيحة:

مثال 2−1:

$$Max \quad Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$S/C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \qquad (2-2)$$

والمطلوب: تحديد الحل الأمثل للبرنامج بالطريقة البيانية

تعتد الطريقة البيانية لحل هذا النوع من البرامج على تحديد الحل الأمثل للبرنامج وفق الطريقة المتبعة لحل نماذج البرمجة الخطية (أي دون الأخذ بعين الاعتبار الشرط الأخير في البرنامج أعلاه)، فإذا كانت قيم المتغيرات الأساسية للنموذج في الحل الأمثل أعداد صحيحة فهو أيضا حل أمثل لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة. بينما في حالة ما كان الحل المتوصل إليه يحتوي على أعداد غير صحيحة، فإنه يجب ادخال تقنيات جديدة لتحسين الحل والبحث عن الحل العددي الصحيح للبرنامج.

أولا تحديد الحل الامثل للبرنامج دون الاخذ بعين الاعتبار شرط الاعداد الصحيحة:

في هذه المرحلة يتم اعداد التمثيل البياني لحل البرنامج كما يلي:

− قيود البرنامج: من القيد الاول يتم تحديد نقطتين لتمثيله بيانيا وهي:

$$x_1 + 3x_2 = 13 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 13/3 \\ x_2 = 0, x_1 = 13 \end{cases} \Rightarrow ct_1(13, {}^{13}\!/_3)$$

اذن القيد الأول للبرنامج يتحدد بالربط بين النقطتين: $A(0, {}^{13}\!/_3)$ و $B(13,0)$.