$x_1 \le 2$ في البرنامج الأول، والقيد $x_1 \ge 3$ في البرنامج الثاني فنحصل على:

$$Max \quad Z = 4x_1 + 6x_2 \qquad\qquad Max \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 7x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \quad (3-14-2) \qquad S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 7x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \quad (4-14-2)$$

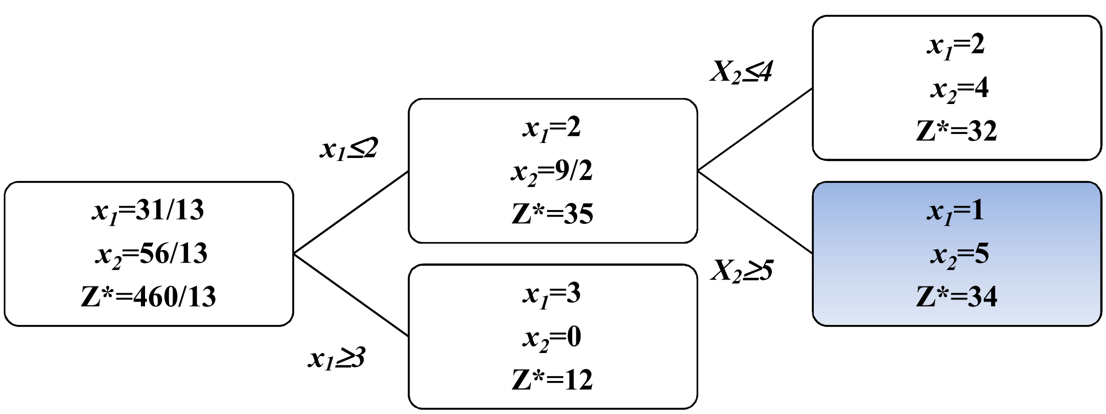
وبحل البرنامج الأول بطريقة السمبلكس، نتحصل على حل عددي صحيح بالنسبة لـ x_1 لكن يبقى x_2 غير صحيح مما يستدعي عملية تفريع جديدة على أساس المتغير الذي تشمل قيمته كسر x_2. بينما بحل البرنامج الثاني فقد تحصلنا على حل أمثل عددي صحيح $(x_1=3 , x_2=0 , Z=12)$ وهو حل مرشح.

اذن يجب تفريع البرنامج الجزئي الأول من جديد بإضافة القيدين: $x_1 \le 4$ و $x_1 \ge 5$ والحصول على برنامجين جزئيين (5) و (6) على الشكل التالي:

$$Max \quad Z = 4x_1 + 6x_2 \qquad\qquad Max \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 7x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \quad (5-14-2) \qquad S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 7x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \ge 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \quad (6-14-2)$$

وبنفس الطريقة يتم البحث عن الحل الامثل العددي الصحيح، والشكل البياني التالي يبين مراحل البحث على الحل الامثل بطريقة التفريع والتحديد:



ومن خلال هذا الشكل يتبين أنه تحصلنا على ثلاث حلول بأعداد صحيحة للبرنامج (2−14)، ونختار الحل الذي يحتوي على أكبر قيمة لدالة الهدف وهو حل البرنامج الجزئي (6)، ونكون بذلك قد حصلنا على نفس الحل الأمثل والتوصل اليه بطريقة المستوى القاطع.

حل التمرين الثالث:

أ. الحل الامثل للبرنامج 2−15 بدون شرط الاعداد الصحيحة، بعد عل البرنامج بطريقة السمبلكس تحصلنا على الجدول التالي:

جدول الحل الامثل للبرنامج 2−15

		x_1	x_2	S_1	
Vb	**Cj**	**2**	**3**	**0**	**b_i**
x_1	**2**	**1**	**2**	**2**	**5/2**
Zj		**2**	**4**	**4**	**Z*=5**
Cj-Zj		**0**	**-1**	**-4**	

بمأن x_1 متغير قاعدي كسري نأخذ القيد المرافق له في الحل الأمثل:

$$x_1+2x_2+2S_1 = 5/4$$

و لدينا $x_2 = 0$ في الحل الأمثل إذن يصبح القيد على الشكل:

$$x_1+2S_1 = 5/4$$

و بعد جمع الأجزاء الصحيحة على جهة و الأجزاء الكسرية على جهة نتحصل على:

$$x_1 = (2S_1+2)+(1/2)$$

نلاحظ أن الجزء الكسري ($1/2$) يستحيل أن يكون أقل من 0، ونستنتج أنه لا يمكن تطبيق طريقة المستوي القاطع.

ب− لو أجرينا تعديلا طفيف على القيد الوحيد في النموذج بحيث تكون كل معاملاته التكنولوجية والطرف الأيمن عبارة عن أعداد صحيحة، إذن لنضرب طرفي القيد بالعدد 4 لنحصل على القيد الجديد:

$$2x_1+4x_2 \leq 5$$

في هذه الحالة نحصل عل الحل الأمثل في الجدول التالي:

		x_1	x_2	S_1	
Vb	**Cj**	**2**	**3**	**0**	**b_i**
x_1	**2**	**1**	**2**	**1/2**	**5/2**
Zj		**2**	**4**	**1**	**Z*=5**
Cj-Zj		**0**	**-1**	**-1**	

ومنه القيد المرافق هو (بعد فصل و جمع الأجزاء الصحيحة عن الأجزاء الكسرية):

$$x_1 = (2)+(-\ 1/2S_1+1/2)$$

ومنه:

$$-1/2S_1+1/2 \leq 0$$

وبعد التعويض نحصل على القيد الجديد:

$$x_1+2x_2 \leq 2$$

وفي الأخير نحصل على الحل الأمثل العددي الصحيح لهذا النموذج: ($x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $Z = 4$)

ملاحظة:

بصفة عامة وحتى يمكن تطبيق طريقة المستوي القاطع يجب أن تكون المعاملات التقنية والطرف الأيمن للقيود عبارة عن أعداد صحيحة.

حل التمرين الرابع:

- يكمن هدف المسألة في تدنئة الوقت الذي تستغرقية عملية الانتاج لتلبية الطلبيات، وعليه نفرض المتغيرات x_{ij} لحظة دخول المنتج i إلى الآلة j .

- **القيود :**

. قيود ترتيب المنتجات على الآلات :

. المنتج P_1 :

$$x_{12}+6 \leq x_{11}$$
$$x_{11}+4 \leq x_{13}$$

. المنتج P_2 :

$$x_{21}+9 \leq x_{23}$$
$$x_{23}+6 \leq x_{22}$$

. قيود تضمن أن كل آلة لا تشتغل على طلبيتين في نفس الوقت :

. الآلة A :

$$x_{11}+4 \leq x_{21}$$

أو

$$x_{21}+9 \leq x_{11}$$

و لترجمة عبارة (أو) رياضيا نستعين بالمتغير الثنائي y_1 حيث :

$y_1 = 0$: نختار القيد الأول أي أن الآلة A تشتغل على الطلبية P_1 أولا.

$y_1 = 1$: نختار القيد الثاني أي أن الآلة a تشتغل على الطلبية P_2 أولا.

و بأخذ M أكبر عدد ممكن نكتب القيدين رياضيا كما يلي :

$$x_{11}+4-x_{21} \leq My_1$$
$$x_{21}+9-x_{11} \leq M(1-y_1)$$

و بنفس الطريقة نحصل على قيود باقي الآلات :

$$x_{12}+6-x_{22} \leq My_2$$
$$x_{22}+5-x_{12} \leq M(1-y_2)$$
$$x_{13}+9-x_{23} \leq My_3$$
$$x_{23}+6-x_{13} \leq M(1-y_3)$$

- **دالة الهدف** : تكتب دالة الهدف في هذه الحالة على الشكل التالي:

$$Z = Max\ \{x_{13}+9\ ,\ x_{23}+6\}$$

هذه الدالة ليست خطية لذلك نعيد صياغتها بالشكل التالي:

$$Min\ Z = X$$

$$s/c$$

$$X \geq x_{13}+9$$

$$X \geq x_{23}+6$$

– **كتابة البرنامج الخطي:** في الأخير يمكن التعبير عن المسألة بالبرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{MaxZ = X}$$

$$\boldsymbol{S/C}\begin{cases} X \geq x_{13}+9 \\ X \geq x_{23}+6 \\ x_{12}+6 \leq x_{11} \\ x_{11}+4 \leq x_{13} \\ x_{21}+9 \leq x_{23} \\ x_{23}+6 \leq x_{22} \\ x_{11}+4-x_{22} \leq My_1 \\ x_{21}+9-x_{11} \leq M(1-y_1) \\ x_{12}+6-x_{22} \leq My_2 \\ x_{22}+5-x_{12} \leq M(1-y_2) \\ x_{13}+9-x_{23} \leq My_3 \\ x_{23}+6-x_{13} \leq M(1-y_3) \\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i = 1,2 \wedge j = 1,2,3 \\ y_1, y_2, y_3 = \{0,1\} \end{cases}$$

حل التمرين الخامس:

– نضع المتغيرات الثنائية x_i $(i=1,2,\ldots,10)$ حيث :

$x_i = 1$: بناء وحدة في المدينة i.

$x_i = 0$: عدم بناء وحدة في المدينة i.

–**القيود** : قيد حجم الأموال المرصودة :

$$28x_1+25.5x_2+30x_3+28x_4+25.5x_5+33x_6+35.5x_7+23x_8+18.5x_9+16x_{10} \leq 200$$

أ. بناء على الأقل وحدة في الشمال و وحدة في الجنوب نكتب هذين القيدين رياضيا كما يلي:

$$x_1+x_2 \geq 1$$

$$x_9+x_{10} \geq 1$$

ب. بناء على الأقل وحدتين في الشرق :

$$x_6+x_7+x_8 \geq 2$$

جـ. بناء الوحدات الثلاث معا في الغرب أو لا نبني أي وحدة :

$$x_3+x_4+x_5 \geq 3$$

أو

$$x_3+x_4+x_5 \leq 0$$

لترجمة عبارة (أو) رياضيا نستعين بمتغير ثنائي آخر و ليكن y , و أكبر عدد ممكن m حيث :

$y = 0$: بناء الوحدات الثلاث معا .

$y = 1$: لا نبني أي وحدة .

و نحصل على القيدين على الشكل التالي :

$$-x_3-x_4-x_5+3 \leq My$$
$$x_3+x_4+x_5 \leq M(1-y)$$

– **كتابة البرنامج الخطي:** في الأخير نتحصل على البرنامج الخطي الموافق على الشكل التالي:

$$MaxZ = 9x_1+7x_2+8.5x_3+8.6x_4+7x_5+8x_6+9.5x_7+6x_8+6x_9+5x_{10}$$

$$S/C\begin{cases}28x_1+25.5x_2+30x_3+28x_4+25.5x_5+33x_6+35.5x_7+23x_8+18.5x_9+16x_{10} \leq 200\\ x_1+x_2 \geq 1\\ x_9+x_{10} \geq 1\\ x_6+x_7+x_8 \geq 2\\ -x_3-x_4-x_5+3 \leq My\\ x_3+x_4+x_5 \leq M(1-y)\\ x_j \wedge y = \{0,1\} \forall j = 1,2,...,10\end{cases}$$

حل التمرين السادس:

أ . تشكيل النموذج:

متغيرات القرار : هذه المسألة هي متغيرات ثنائية و لتكن x_i $(i = 1,2,3,4,5,6)$ حيث :

. $x_i = 1$: اختيار المشروع i .

. $x_i = 0$: عدم اختيار المشروع i .

القيود : تعبر عن المبالغ المالية السنوية المرصودة لإنجاز المشاريع المختارة :

. السنة 1 : $8x_1+5x_2+17x_3+10x_4+12x_5+9x_6 \leq 42$

. السنة 2 : $14x_1+7x_2+4x_3+15x_4+10x_5+6x_6 \leq 42$

. السنة 3 : $11x_1+12x_2+3x_3+5x_4+12x_5+13x_6 \leq 42$

دالة الهدف : و هي حاصل طرح مجموع المداخيل المتوقعة من مجموع التكاليف المتوقعة :

. تكاليف البناء الكلية المتوقعة :

$$(8+14+11)x_1+(5+7+12)x_2+.....+(9+6+13)x_6$$

. المداخيل الكلية المتوقعة :

$$39x_1+36x_2+....+34x_6$$

ومنه نحصل على دالة الهدف :

$$z = 6x_1+12x_2+7x_3+8x_4+12x_5+6x_6$$

و يكون شكل النموذج الكامل كما يلي :

$$Max\ Z = 6x_1+12x_2+7x_3+8x_4+12x_5+6x_6$$

$$s.c$$

$$8x_1+5x_2+17x_3+10x_4+12x_5+9x_6 \leq 42$$

$$14x_1+7x_2+4x_3+15x_4+10x_5+6x_6 \leq 42$$

$$11x_1+12x_2+3x_3+5x_4+12x_5+13x_6 \leq 42$$

$x_1 , ..., x_6 = 1 , 0$ (متغيرات ثنائية)

ب . 1) يترجم هذا الشرط رياضيا كما يلي: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leq 4$

ب . 2) " " " : $x_4+x_5+x_6 \leq 1$

ب . 3) " " " : $x_3 \leq x_2$

ب . 4) يعبر عن اختيار المشاريع الثلاث معا أو لا واحد بالقيدين المتنافيين التاليين :

$$x_1+x_5+x_6 \geq 3$$

أو

$$x_1+x_5+x_6 \leq 0$$

نعبر عن هذين القيدين رياضيا بدل استخدام عبارة (أو) وذلك بالاستعانة بالمتغير الثنائي الجديد y حيث:

. $y = 0$: اختيار المشاريع الثلاث معا.

. $y = 1$: لا يتم اختيار أي من هذه المشاريع.

و نعيد صياغة القيدين السابقين كما يلي (حيث m أكبر عدد ممكن) :

$$- x_1 - x_5 - x_6+3 \leq My$$

$$x_1+x_5+x_6 \leq M(1 - y)$$

ب . 5) يترجم هذا الشرط رياضيا بالقيدين التاليين : $x_1 \leq x_3$, $x_1 \leq x_4$.