أصبحت مصفوفة G ذات حجم 2*2 وبذالك اقل حجما من السابق وكذلك يسهل الحل

MaxMin ≤ V ≤ MinMax

2 ≤ V ≤ 3

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$COF\ \ G = \begin{bmatrix} \propto_{11} & \propto_{12} \\ \propto_{21} & \propto_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

حيث ان M_{ij} هي مصفوفه المصغرة بعد حذف الصف i والعمود j

$$\propto_{11} = (-1)^{1+1} * 1 = 1$$

$$\propto_{12} = (-1)^{1+2} * 4 = -4$$

$$\propto_{21} = (-1)^{2+1} * 3 = -3$$

$$\propto_{22} = (-1)^{2+2} * 2 = 2$$

$$COF\ \ G = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ \ G = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Prob.stratgy A = $\frac{(1\ \ 1)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{(1\ \ 1)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{[-3\ \ -1]}{[-4]} = (\ \frac{3}{4}\ \ \frac{1}{4}\ )$

Probability play strategy A1 = ¾

Probability play strategy A2 = ¼

اما بالنسبة للاعب B

Prob.stratgy B = $\frac{(1\ \ 1)\begin{bmatrix}1 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}}{(1\ \ 1)\begin{bmatrix}1 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}} = \frac{[-2\ \ -2]}{[-4]} = (\ \frac{1}{2}\ \ \ \frac{1}{2}\ )$

Probability play strategy B1 = ½

Probability play strategy B2 = ½

Value game = $\left(\ \frac{3}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \right)\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{5}{2}$

الواجب

استخدم جبر المصفوفات وطريقة المعادلات لايجاد الحل لكى اللاعبين

	B1	B2	B3
A1	-2	5	-4
A2	1	-4	3
A3	3	2	-1

① نظرية المباراة التعاونية

① التوازن ناش Nash Equilabram

المباراة التعاونية هي مباراة غير صفرية

$$S^* = \arg\max u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall i$$

استراتيجية التوازن — عائد الاستراتيجية

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

توضيح ذلك من خلال المثال

A \ B			
	4,3	5,2	0,3
	3,6	2,4	4,4
	3,0	4,4	6,6

توازن يعني اللاعبين يلعبون بنفس المكان

$$u_1(a_1, b_1) = \max \begin{cases} u_1(a_1, b_1) = 4 \\ u_1(a_2, b_1) = 3 \\ u_1(a_3, b_1) = 3 \end{cases} = \max = 4$$

$$u_2(a_1, b_1) = \max \begin{cases} u_2(a_1, b_1) = 3 \\ u_2(a_1, b_2) = 2 \\ u_2(a_1, b_3) = 3 \end{cases} = \max = 3$$

② يمكن أن Max للاعب A تقابل (a_1, b_1) والـ Max للاعب B تقابل (a_1, b_1) لذلك فإن a_1, b_1 تمثل توازن Nash في حالة اللاعب الأول اختار إستراتيجية a_1 فإن اللاعب الثاني سوف يختار الستراتيجية الأولى b_1.

∴ يوجد تعظم + استقرار

$$u_1(a_2, b_2) = \text{MaX} \begin{bmatrix} u_1(a_1, b_2) = 5 \\ u_1(a_2, b_2) = 2 \\ u_1(a_3, b_2) = 4 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Max}$$

$$u_2(a_2, b_2) = \text{MaX} \begin{bmatrix} u_2(a_2, b_1) = 6 \\ u_2(a_2, b_2) = 4 \\ u_2(a_2, b_3) = 4 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Max}$$

∴ لا يوجد تعظم توازن في $u_2(a_2, b_2)$ لأن $u_2(a_1, b_2)$ و تقع في نفس فئة $u_2(a_2, b_1)$

$$u_1(a_3, b_3) = \text{MaX} \begin{Bmatrix} u_1(a_1, b_3) = 0 \\ u_1(a_2, b_3) = 4 \\ u_1(a_3, b_3) = 6 \end{Bmatrix} = \text{Max} = 6 \leftarrow \text{Max}$$

$$u_2(a_3, b_3) = \text{MaX} \begin{Bmatrix} u_2(a_3, b_1) = 0 \\ u_2(a_3, b_2) = 4 \\ u_2(a_3, b_3) = 6 \end{Bmatrix} = \text{Max} = 6 \leftarrow \text{Max}$$

يوجد استقرار (توازن ناش) لأن كل من (a_3, b_3) تمثل Max

ملاحظة في اللعبة يوجد توازنين اثنين وأن (a_3, b_3) هو الأفضل

3

هناك انواع من مصفوفات الدفع تكتب بصيغة مباراة تعاونية ولكن في الحقيقة او الواقع هي مصفوفة دفع تنافسية كما في المصفوفة التالية حيث هكذا مصفوفات لا يمكن ايجاد التوازن لها

	صورة H	كتابة T
صورة H	1, 1	-1, 1
كتابة T	1, -1	-1, -1

⇐ لا تصلح هذه اللعبة في ايجاد التوازن لانها غير تعاونية

يمكن اعادة كتابة مصفوفة الدفع بالشكل التالي

	H	T
H صورة	1	-1
T كتابة	1	-1

جد توازن اللعبة

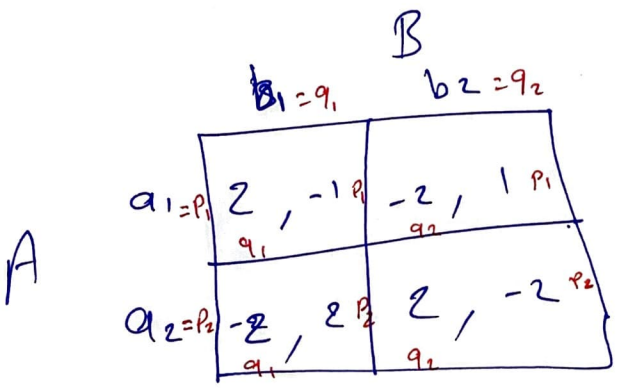
H.W

3, 1	3, 1	4, 5
1, 3	2, 2	6, 4
5, 4	4, 6	7, 8

4

④ طريقة الاستراتيجيات المختلطة

اذا كان لدينا مصفوفة دفع 2×2 فإنه يمكن ايجاد القيم الاحتمالية لكل ستراتيجية من خلال الاتي



اتيناه من ايجاد القيم الاحتمالية للاعب A فانه تأخذ العود بالنسبة لعوائد اللاعب الثاني وبالعكس بالنسبة للاعب B تأخذ الصف لعوائد اللاعب A

$$-p_1 + 2p_2 = p_1 - 2p_2$$

$$p_1 + p_2 = 1 \implies p_2 = 1 - p_1$$

$$\Rightarrow -p_1 + 2(1 - p_1) = p_1 - 2 + 2p_1$$

$$-3p_1 + 2 = 3p_1 - 2$$

$$-6p_1 = -4$$

$$p_1 = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$p_2 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

5

$q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 1 - q_1$

$2q_1 - 2(1-q_1) = -2q_1 + 2(1-q_1)$

$2q_1 - 2 + 2q_1 = -2q_1 + 2 - 2q_1$

$4q_1 = -4q_1 + 4$

$8q_1 = 4$

$q_1 = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$q_2 = \boxed{\frac{1}{2}}$

---

(٣) الاعتماد على طريقة ازالة (المفضلة) لإيجاد التوازن

في المباراة التعاونية ذات المجموع الغير صفري يمكن ان نفاضل بين الصفوف والاعمدة على اساس الاستراتيجية المهيمنة ونقصد هنا بالاستراتيجية الاكبر وفي المباراة التعاونية كلا اللاعبين يعتمدان على مبدأ Max Max اي انه سوف يتم ازالة الاستراتيجية الاقل بعد المفاضلة وهنا سوف يتم المفاضلة بالنسبة للصفوف بالاعتماد على عوائد اللاعب الاول وبالنسبة للاعمدة يتم الاعتماد على عوائد اللاعب الثاني حيث ان الاستراتيجية الاضعف هي التي تبتعد عن التوازن لنتائج على اللاعبين.

مثال

6

مثال

B

A	b_1	b_2	b_3
a_1	3,3	4,1	2,2
a_2	1,3	2,4	2,8
a_3	2,4	3,6	7,0

⇒ نقسم المقابلة بالنسبة للصفوف للجدول A وكذلك لكل عوائد الجدول B ونجد الصف الأقل لكل الجدول max

صفوف ⇓ والفاضلة مرة بالنسبة للصفوف ومرة بالنسبة للأعمدة

	b_1	b_2	b_3
a_1	3,3	4,1	4,2
a_3	2,4	3,6	7,0

⇒ وكان المقابلة بالنسبة للأعمدة وكانت لا يوجد عوائد للجدول A

أعمدة ⇓

	b_1	b_2
a_1	3,3	4,1
a_3	2,4	3,6

⇓

	b_1	b_2
a_1	3,3	4,1

⇓

	b_1
a_1	3*, 3*

⇒ التوازن

وإذا تعذر إيجاد أحد بالمقابلة بالصفوف أو الأعمدة فإنه لا يوجد توازن