الفصل الأول

الأخطاء

يشمل التحليل العددي على تطوير واستنتاج طرق خاصة لكل المعادلات التفاضلية والتكاملية ولحساب النتائج العددية المطلوبة عند توفر قيم عددية أولية تسمى القيم المعطاة بالمعلومات الداخلة بينما تسمى النتائج المطلوبة بالمعلومات الخارجة في حين تسمى المعالجة بطريقة الحسابات(الخوارزميات).

المعلومات الداخلة ← طرق الحسابات ← المعلومات الخارجة

أنواع الأخطاء:

يوجد خمسة أنواع من الأخطاء:

1. أخطاء صياغة(Formulation Errors).:وهو الخطأ الناتج من إهمال بعض العوامل والمؤثرات إذا كانت تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الأساسي للمشكلة وهذا النوع من النماذج يسمى أخطاء صياغة مثل القوة $F=\frac{d}{dt}(mv), m\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ حيث F القوة، m الكتلة v السرعة، c سرعة الضوء ولما كانت قيمة v صغيرة بالنسبة إلى c يمكن أن نبسط النموذج إلى $F=\frac{d}{dt}(m_0 v)$

2. أخطاء موروثة(Inherent Errors): وهو الخطأ للناتج من قيم البيلنات للداخلة وللناتجة عن عدم دقة القياس مثل قراءات بعض الأجهزة في تجربة أو على بيلنات مثل الأعداد غير النسبية $\pi, e, \sqrt{2}$ حيث لا يمكن تمثيلها بشكل مضبوط بل بشكل تقريبي.

3. أخطاء التدوير والقطع(Rounding and Chopping):يستخدم هذا النوع من الأخطاء في الأعداد مثلا نقول أن عدد طلاب كلية التربية لهذه السنة هو 5000 طالب فقط لتقريب عدد الطلاب الحقيقي للذي هو 4966 طالب أو لتدوير الأعداد مثلا 0.08547 و 0.28536 إلى ثلاثة مراتب

عشـرية على التوالي هو 0.086 و 0.285 وخطأ التدوير ينتج من حاصـل الفرق بين العددين قبل التدوير وبعده.

أما خطأ القطع ينتج من قطع الرقم من المرتبة التي نريدها ففي المثالين الســابقين يكون ناتج القطع إلى ثلاثة مراتب هو 0.085 و 0.285.

4. أخطاء البتر(Truncation Error):وهو الخطأ الناشــئ عن اســتبدال عملية منتهية بعملية لانهائية ويستخدم هذا النوع من الأخطاء مع الدوال مثلا:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots..$$

فعند حل مسائل من هذا النوع نضطر إلى قطع المتسلسلة عند حد يتناسب مع الحل.

5. أخطاء التراكم(Accumulated Error):وهو الخطأ للناتج من تكرار لمجموعة من العمليات الحسابية.

حساب الأخطاء(طرق معالجة الأخطاء):

1.الخطأ المطلق(Absolute Error):يعرف الخطأ في القيمة التقريبية كالأتي

$$e_x = |x - x^*|$$

2.الخطأ النســبي(Relative Error):يعرف الخطأ النســبي بحاصــل قســمة الخطأ على القيمة المضبوطة

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

حيث:

x القيمة المضبوطة و x^* القيمة التقريبية

مثال(1):- لتكن 0.0007 هي عبارة عن قيمة تقريبية والقيمة المضـــبوطة هي 0.0008 .جد الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

Solution:-

$$e_x = |x - x^*| = |0.0008 - 0.0007| = 0.0001$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{0.0001}{0.0008} = 0.125$$

ســؤال:- اكتب برنامج بلغة الماتلاب لحســاب الخطأ المطلق والخطأ النســبي $ax^2 + bx + c = 0$

x=input('x=');
a=input('a=');
b=input('b=');
c=input('c=');

$$\boldsymbol{x_1 = (-b + sqrt(b^\wedge 2 - 4 * a * c)/(2 * a)};$$
$$\boldsymbol{x_2 = (-b - sqrt(b^\wedge 2 - 4 * a * c))/(2 * a)};$$
$$\boldsymbol{e_{x_1} = abs(x_1 - x)}$$
$$\boldsymbol{e_{x_2} = abs(x_2 - x)};$$
$$\boldsymbol{s_{x_1} = e_{x_1}/x};$$
$$\boldsymbol{\delta_{x_2} = e_{x_2}/x};$$

disp(ex1);
disp(ex2);
disp(sx1);
disp(sx2);

ملاحظة : في لغة ماتلاب يجب أن يكتب البرنامج بالحروف الصغيرة.

الفصل الثاني

حل المعادلات الغير الخطية

Solution of non-linear Equation

المقصود بالمعادلة اللاخطية هي أي معادلة تحتوي على قوى مختلفة لــ (x) أو دوال متسامية(مثلثيه أو لوغارتمية أو اسية).

فعندما يراد إيجاد جذور المعادلة التالية $x^2 + 5x - 2 = 0$ نلاحظ بأنها معادلة غير خطية يمكن استخدام طريقة الدستور لإيجاد جذري المعادلة . في حين لو حاولنا إيجاد جذر المعادلة $x\, ln(\, x) + 5 = 0$ نلاحظ انه لا توجد طريقة أو قانون لإيجاد مثل هذه المعادلات. لذاك يتم اللجوء إلى استخدام الطرق العددية التقريبية لإيجاد الجذور.

بشكل عام يمكن كتابة المعادلة التي تحتوي على متغير واحد بالشكل

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

في هذا الفصل سنستعرض عددا من الطرق العددية التي تهدف إلى إيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة (1) أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصــفر. إن جميع هذه الطرق العددية تحتاج إلى قيمة تقريبية لجذر القيمة العددية ،وسوف ندرس في هذا الفصل عدد من الطرق العددية لإيجاد جذر المعادلة.

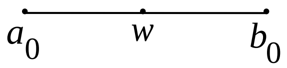
1. طريقة تنصيف الفترة:-

Bisection Method:-

وهي إحدى طرق إيجاد الجذور والتي تعتمد على وجود جذر للمعادلة في الفترة (a,b) أي إن $f(a).f(b)\langle 0$.

خطوات الحل لهذه الطريقة يمكن تلخيصها بما يلي:

1. اختيار الفترة $[a,b]$ و ε و (f مستمرة في الفترة $[a_0,b_0]$) لقيم $f(a_0)\times f(b_0)<0$
2. $w=\frac{a_i+b_i}{2}$



3. إذا كان $f(a_i)\times f(w)=0$ فان w هو جذر المعادلة.
4. إذا كان $f(a_i)\times f(w)<0$ فان $a_{i+1}=a_i$ و $b_i+1=w$.
5. إذا كان $f(a_i)\times f(w)\rangle 0$ فان $a_{i+1}=w$ و $b_i+1=b_i$.

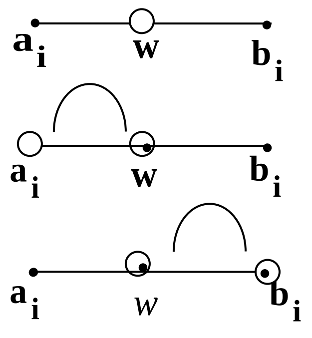
وبتكرار الطريقة أعلاه نحصل على متتابعة $[a,b]$ التي تحتوي على جذر المعادلة وتكون أطوالها اصغر كلما زادت قيمةi وعلى هذا الأساس أذا كان المطلوب إيجاد قيمة مقربة للجذر لا يتجاوز الخطأ فيها عنε ، نتوقف في حالة $|b_i-a_i|\le\varepsilon$.

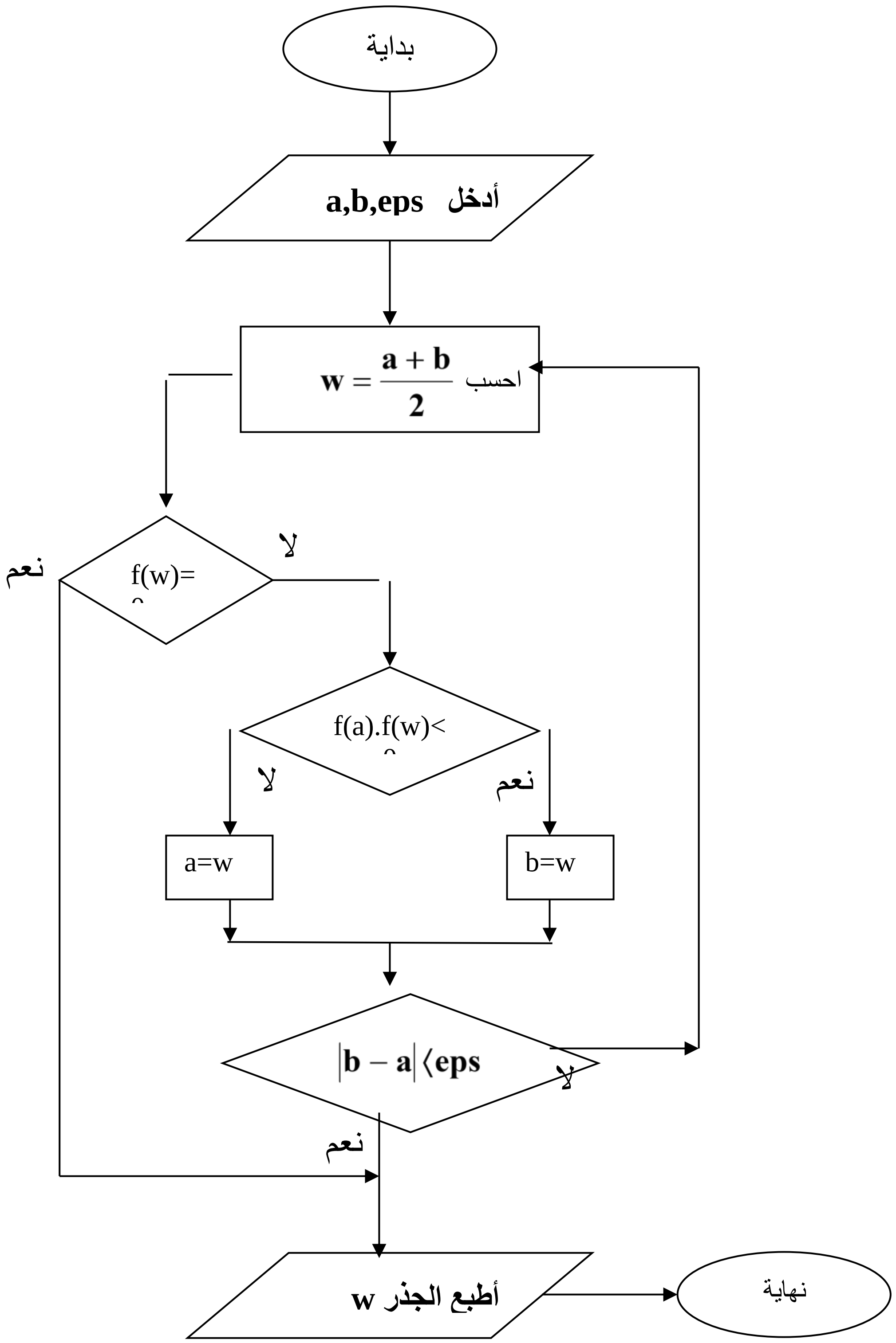
ملاحظة:

$\mathbf{f(a_i).f(w)=0}$ **w the root**

$\mathbf{f(a_i).f(w)\langle 0 \quad a_{i+1}=a_i, b_{i+1}=w}$

$\mathbf{f(a_i).f(w)\rangle 0 \quad a_{i+1}=w, b_{i+1}=b_i}$





المخطط الانسيابي لطريقة تنصيف الفترة

مثال:– جد جذر المعادلة $f(x) =$ xlnx-1 بطريقة تنصيف الفترة [1,2] و $\varepsilon = 0.05$

إعداد:
أ.يونس حازم **أ.صهيب عبد الجبار**

التكرار الأول:

$$f(1) = 1\,ln(1) - 1, (ln(1) = 0)$$
$$f(2) = 2\,ln(2) - 1 = 0.386294361$$
$$f(1) \times f(2) < 0 \Rightarrow -1 \times 0.386294361 = -0.386294361 < 0$$
$$w_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$
$$f(a_0) \times f(w_0)$$
$$f(1) = -1, f(1.5) = f(1.5) = 1.5\,ln\,1.5 - 1 = -0.391802337$$
$$f(1) \times f(1.5) > 0 \Rightarrow f(a_0) \times f(w_0) > 0 \Rightarrow -1 \times -0.391802337 = 0.391802337 > 0$$
$$a_{i+1} = w_0, b_{i+1} = b_0, (i = 0)$$
$$a_1 = w_0 = 1.5, b_1 = b_0 = 2$$
$$|b_1 - a_1| = |2 - 1.5| = 0.5 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:

$$w_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$
$$f(a_1) \times f(w_1) > 0 \Rightarrow f(1.5) = -0.391802337$$
$$f(1.75) = 1.75\,ln\,1.75 - 1 = -0.020672371$$
$$f(1.5) \times (1.75) > 0 \Rightarrow (-0.391802337) \times (-0.020672371) = 0.008099483 > 0$$
$$a_{i+1} = w_1, b_{i+1} = b_1, (i = 1)$$
$$a_2 = w_1 = 1.75, b_2 = b_1 = 2$$
$$|b_2 - a_2| = |2 - 1.75| = 0.25 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$w_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$$
$$f(1.75) = -0.020672371$$
$$f(1.875) = 0.178641236$$
$$f(1.75) \times (1.875) < 0$$
$$a_3 = a_2 = 1.75, b_3 = w_2$$
$$a_3 = 1.75, b_3 = 1.875$$
$$|b_3 - a_3| = |1.875 - 1.75| = 0.125 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$w_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125$$
$$f(1.75) = -0.020672371$$
$$f(1.8125) = 0.077906632$$
$$f(1.75) \times f(1.8125) < 0 \Rightarrow= -0.001610514 < 0$$
$$|b_3 - a_3| = |1.875 - 1.75| = 0.125 > \varepsilon$$

$\Leftarrow$ نستمر في العمليات التكرارية حتى نصل إلى تكرار تكون فيه $|b_i - a_i| \leq \varepsilon$ ثم نتوقف.

إعداد:

أ.يونس حازم **أ.صهيب عبد الجبار**

التكرار التاسع:

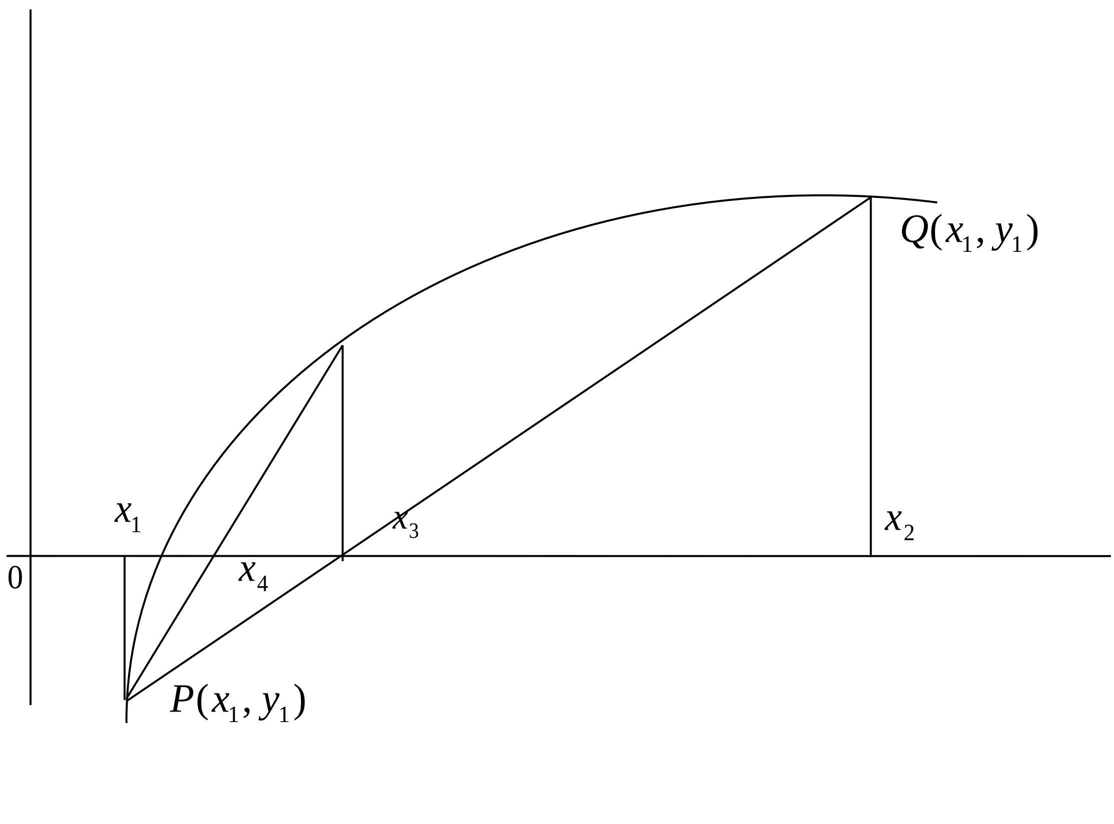
$$a_8 = w_7, b_8 = b_7$$
$$a_8 = 1.76171875, b_8 = 1.765625$$
$$w_8 = \frac{a_8 + b_8}{2} = \frac{1.76171875 + 1.765625}{2} = 1.763671875$$
$$f(a_8) \times (w_8) = (-0.002356474) \cdot (0.000703768) = -0.000001658 < 0$$
$$|b_8 - a_8| = |1.765625 - 1.76171875| = 0.00390625 < \varepsilon$$

إلى هنا نتوقف لان $\varepsilon \leq |b_i - a_i|$.

2.طريقة الموضع الكاذب:ـ

Method of false Position:-

تعتبر هذه الطريقة من الطرق القديمة لحســـاب جذر المعادلة$f(x) = 0$ في هذه الطريقة نجد عـددين x_1, x_2 بحيـث يقع الجـذر المطلوب بينهمـا أي أن مخطط للـدللـة $y = f(x)$ يقطع المحور x بينx_1, x_2وان قيمتي $y_2 = f(x_2), y_1 = f(x_1)$ مختلفتين في الإشـــــارة . بما أن بالإمكان تقريب أي قطعة صـــغيرة من منحني أملس بخط مســـتقيم لذا ســـوف نفترض أن قطعة المســـــتقيم بين النقطتين(x_1, y_1) و (x_2, y_2) بمثلبة تقريب للدللة f في الفترة$[x_1, x_2]$ وبالتالي تعتبر نقطة تقاطع المســـتقيم هذا مع المحورx قيمة تقريبية لجذر المعادلة$f(x) = 0$ هذه هي القاعدة الأسـاسـية التي تعتمد عليها طريقة الموضـع الكاذب ، ونشـتق الصـيغة العامة لحساب القيمة التقريبية للجذر كما في الشكل الأتي :



نفرض قطعة مستقيم الواصل بين$P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)$ تقطع المحور x بالنقطةx_3 وعليه يكون:

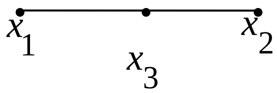
$$\overline{QP} = \frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y = 0$$

إعداد:
أ.يونس حازم
أ.صهيب عبد الجبار

$\frac{0-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)} \Rightarrow x=x_2-\frac{y_2(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)}$

غير x بـx_3 إن قيمةx_3 لا تعتبر تخمينا جيدا للجذر ،وذلك لان الدالةf ليست بالضبط الخط المستقيم بينPو Q ولذلك يجب إيجاد تخمين جيد أو تقريب أفضل لجذر المعادلة ويتم هذا بإعادة الأسلوب أعلاه بعد تعيين القيمتين الجديدتين حول الجذر فنقوم أولا بحساب= y_3 $f(x_3)$ وبيان اختلاف إشارتهما معy_1, y_2فإذا كان $y_1-y_2<0$ فان الجذر يقع بينx_1, x_3 وبخلاف ذلك فان الجذر يقع بينx_2, x_3.



وبهذا يمكن كتابة الصيغة العامة بطريقة الموضع الكاذب بالشكل الأتي :

$$x_{i+1} = x_i-\underbrace{\frac{y_i(x_i-x_{i-1})}{(y_i-y_{i-1})}}_{\text{w نعتبرها}}$$

$$x_{i+1}=\frac{x_i[y_i-y_{i-1}]-y_i(x_i-x_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}=\frac{x_iy_i-x_iy_{i-1}-x_iy_i+x_{i-1}y_i}{y_i-y_{i-1}}$$

$$x_{i+1}=\frac{x_{i-1}y_i-x_iy_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}$$

علما انه يجب إن يتم اختيار اختلاف الإشارة بينy_{i-1} و y_i في كل خطوة واختيار قيمتين جديدتين حول الجذر وهذا يكرر استخدام الصيغة هذه ويتوقف عندما يكون اقل من ε.

$|x_{i+1}-x_i| \le \varepsilon, i=2,3,\ldots\ldots..$

خوارزمية الموضع الكاذب:ـ

1- إدخال a, b, ε .

2- احسب $f(a), f(b)$

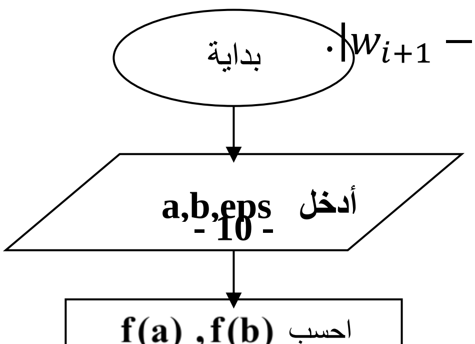
3- احسب $w_i=\frac{a_if(b_i)-b_if(a_i)}{f(b_i)-f(a_i)}, (i=0)$

4- احسب $f(w) \Leftarrow f(w_i)\times f(a_i)=0$ نتوقف.

5- احسب $b_{i+1}=b_i, a_{i+1}=w_i \Leftarrow f(a_i)\times f(w_i)>0$.

6- احسب $b_{i+1}=w_i, a_{i+1}=a_i \Leftarrow f(a_i)\times f(w_i)<0$.

7- نتوقف في حالة $|w_{i+1}-w_i| \le \varepsilon$.



نعم

مثال (1): جد المعادلة غير الخطية $x\ln x - 1 = 0$ باستخدام طريقة الموضع الكاذب في الفترة $[1,2]$, $\varepsilon = 0.0001$.

التكرار الأول:

$$w_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{(1)(0.3862) - (2)(-1)}{0.3862 + 1} = \frac{2.3862}{1.3862} = 1.7213$$

$$w_0 = 1.7213$$

$$f(a_0) \times f(w) \Rightarrow f(a_0) = -1, f(w) = -0.0651$$

$$f(a_0) \times f(w) > 0$$

$$a_{i+1} = a_{0+1} = a_1 = w_0 = 1.7213$$

$$b_{i+1} = b_{0+1} = b_1 = b_0 = 2$$

$$w_0 = 1.7213, b_0 = 2$$
$$|w_0 - w| = |1.7213| = 1.7213 > \varepsilon (w = 0)$$

التكرار الثاني:

$$w_1 = \frac{1.7213f(2) - 2f(1.7213)}{f(2) - f(1.7213)}$$
$$f(2) = 0.3862, f(1.7213) = -0.0651$$
$$w_1 = \frac{0.6647 + 0.1302}{0.3862 + 0.0651} = \frac{0.7949}{0.4513} = 1.7613$$
$$f(a_1) \times f(w_1)$$
$$f(1.7213) \times f(1.7613) = -0.0651 \times -0.0030 = 0.00019 > 0$$
$$|w_1 - w_0| = |1.7613 - 1.7213| = 0.04 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$b_2 = 2, a_2 = 1.7613$$
$$w_2 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = \frac{1.7613f(2) - 2f(1.7613)}{f(2) - f(1.7613)}$$
$$f(2) = 2\,ln\,2 - 1 = 0.3862$$
$$f(1.7213) = 1.7613\,ln\,1\,.7613 - 1 = -0.003$$

$$w_2 = \frac{1.7613 \times 0.3862 - 2 \times 0.0030}{0.3862 + 0.0030} = \frac{0.6802 + 0.006}{0.3892} = \frac{0.6862}{0.3892}$$
$$= 17631$$
$$f(a_2) \times f(w_2) \Rightarrow f(1.7613) \times f(1.7631) = -0.0030 \times -0.0001 > 0$$
$$a_3 = 1.7631, b_3 = 2$$
$$|w_2 - w_1| = |1.7631 - 1.7613| = 0.0018 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$w_3 = \frac{1.7631f(2) - 2f(1.7631)}{f(2) - f(1.7631)}$$
$$f(1.7631) = -0.0001, f(2) = 0.3862$$
$$w_3 = \frac{1.7631 \times 0.3862 + 2 \times 0.0001}{0.3862 + 0.0001} = \frac{0.6811}{0.3862} = 1.7631$$
$$f(a_3) \times f(w_3) \Rightarrow f(1.7631) \div f(1.7631) = -0.0001 \times -0.0001 > 0$$
$$a_4 = 1.7631, b_4 = 2$$
$$|w_3 - w_2| = |1.7631 - 1.7631| = 0$$

$\because \varepsilon > 0 \Leftarrow \therefore$ سوف نتوقف عن عملية التكرار.

3. طريقة القاطع:-

Secant Method:-

إن طريقة للقاطع قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ تشـــبه إلى حد بعيد طريقة الموضـع الكاذب، لتطبيق الطريقة نقوم أولا بإيجاد تقريبين للجذر x_1, x_2 ليس من الضـروري إن يكون على جهة الجذر المطلوب كما في طريقة الموضــــع الكاذب، ولكي نحســـب القيمة للتقريبية للجديدة للجذر نجد معادلة للمستقيم للمار بالنقطتين $(x_2, f(x_2)), (x_1, f(x_1))$فتكون القيمة للتالية للجذر x_3 عبارة عن تقاطع المســـتقيم مع المحور x،وبنفس للطريقة نحسب قيمة x_4 عن تقاطع للمستقيم للمار بالنقطتين $(x_3, f(x_3)), (x_2, f(x_2))$ مع المحور x. وبتكرار العملية نحصـل على المتتابعة (x_n) من الصيغة العامة بطريقة القاطع وهي:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

يجب إن يكون اختيار التخمينين الأولين x_1, x_2 بحيث إن ميل المســـتقيم المار بالنقطتين $(x_2, f(x_2)), (x_1, f(x_1))$ليست قريبة من الصـفر بعبارة أخرى يجب أن لا تكون مشـتقة الدالة f قرب النقطتين قريبة من الصـــفر لأنه قد نحصـــل على متتابعة (x_n) متقاربة ببطء أو متباعدة.

خوارزمية طريقة القاطع:

1- إدخال x_0, x_1, ε.

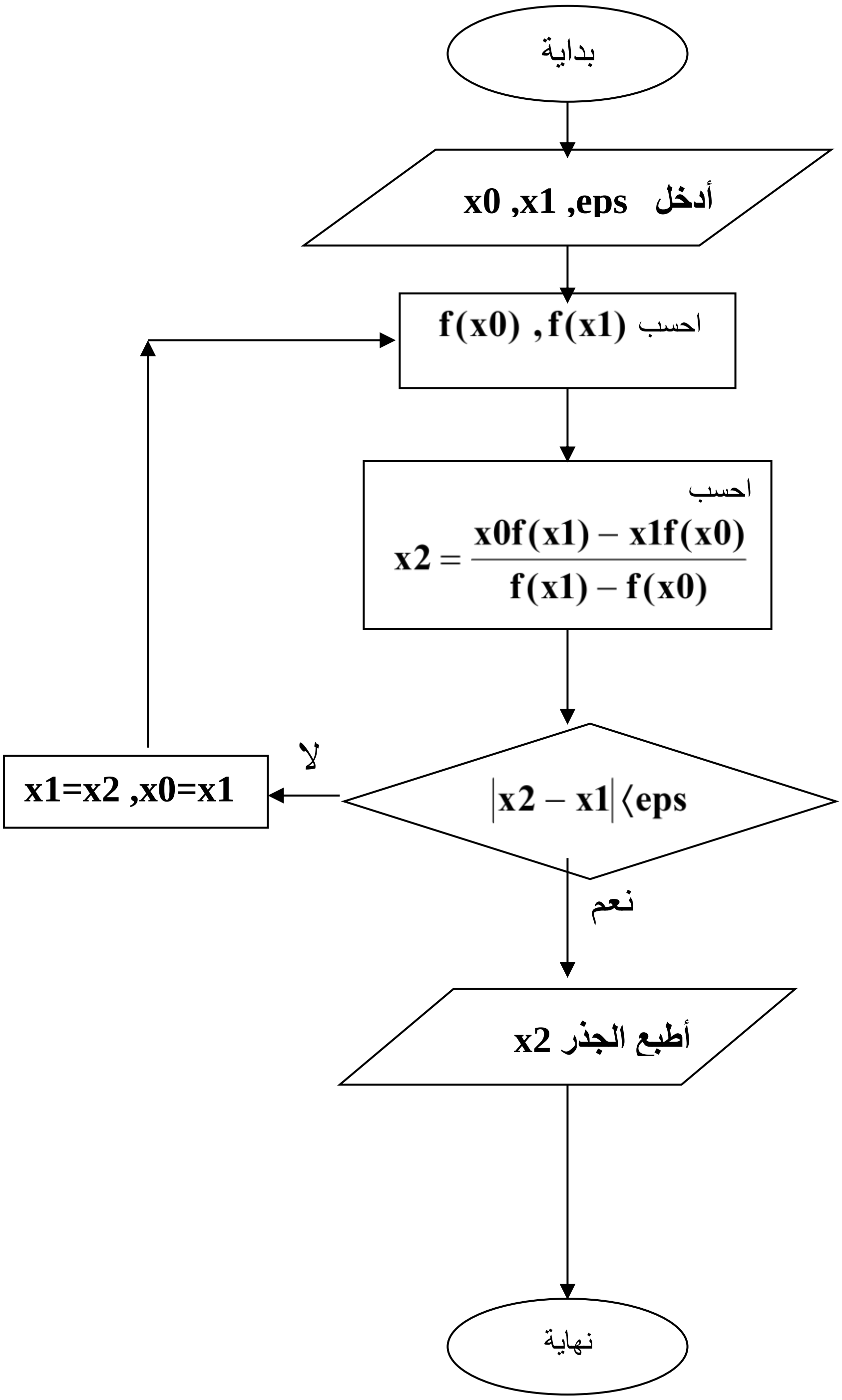
2- احسب $f(x_0)$.

3- احسب $f(x_1)$.

4- $x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

5- إذا كان $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$ نتوقف.

6- $f_0 = f_1, x_1 = x_2, x_0 = x_1 \Leftarrow$ ارجع إلى الخطوة (3).



المخطط الانسيابي لطريقة القاطع

مثال (1): جد جذر المعادلة غير الخطية $x\ln x-1$ باستخدام طريقة القاطع ، $\varepsilon = 0.005$, $[1,2]$.

الحل:

$$f(x_0) = f(1) = 1\,ln\,1 - 1 = -1$$
$$f(x_1) = f(2) = 2\,ln\,2 - 1 = 0.3862$$

التكرار الأول:

$$x_2 = \frac{1f(2) - 2f(1)}{f(2) - f(1)} = \frac{1 \times 0.3862 - 2 \times (-1)}{0.3862 + 1} = \frac{2.3862}{1.3862} = 1.7213$$
$$|x_2 - x_1| = |1.7213 - 2| = |-0.2787| = 0.2787 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:

$$f(x_1) = 2\,ln\,2 - 1 = 0.3862$$
$$f(x_2) = 1.7213\,ln\,1.7213 - 1 = -0.0651$$
$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{2 \times -0.0651 - 1.7213 \times 0.3862}{-0.0651 - 0.3862} = \frac{-0.7949}{-0.4513} = 1.7613$$
$$|x_3 - x_2| = |1.7613 - 1.7213| = 0.04 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$f(x_2) = 1.7213\,ln\,1.7213 - 1 = -0.0651$$
$$f(x_3) = 1.7613\,ln\,1.7613 - 1 = -0.003$$
$$x_4 = \frac{1.7213f(1.7613) - 1.7613f(1.7213)}{f(1.7613) - f(1.7213)}$$
$$x_4 = \frac{1.7213 \times -0.0030 + 1.7613 \times 0.0651}{-0.0030 + 0.0651}$$
$$x_4 = \frac{0.0051 + 0.1146}{0.0621} = \frac{0.1197}{0.0621} \Rightarrow x_3 = 1.9275$$
$$|x_4 - x_3| = |1.9275 - 1.7213| = 0.2062 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$f(x_3) = 1.7613\,ln\,1.7613 - 1 = -0.0030$$
$$f(x_4) = 1.9275\,ln\,1.9275 - 1 = +0.2648$$
$$x_5 = \frac{x_3 f(x_4) - x_4 f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = \frac{1.7213 \times 0.2648 + 1.9275 \times 0.0030}{0.2648 + 0.0030}$$
$$= \frac{0.4558 + 0.00578}{0.2678} = \frac{0.46158}{0.2678} \Rightarrow x_5 = 1.72359$$
$$|x_5 - x_4| = |1.72359 - 1.7613| = 0.003771 < \varepsilon$$

∴ نتوقف عن عملية التكرار.

4.طريقة نيوتن:–

Newton-Raphso Method:

أذاكان $x = x_0$ هو جذر تقريبي لأحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ فهذا يعني $f(x_0) \neq 0$ أي أن $f(x_0)$ كمية صغيرة جدا لا تساوي صفر.

$\therefore$ x_0 هي قيمة تقريبية لذا فان h + x_0 هي القيمة المضبوطة للجذر بمعنى أن $x = x_0 + h$

$x - x_0 = h \Leftarrow h$ أي أن المطلوب هو إيجاد قيمة h باستخدام نظرية تايلر نحصل على:-

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots\dots\dots\dots = 0$$

$\because$ h هي كمية صغيرة فان h^2 هي كمية اصغر من h $(h > h^2 > h^3)$ لذا فان إهمال هذه القيمة والحصول على :

$$f(x_0 + h) \cong f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, f'(x_0) \neq 0$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_{i-1}, x_0 = x_i$$

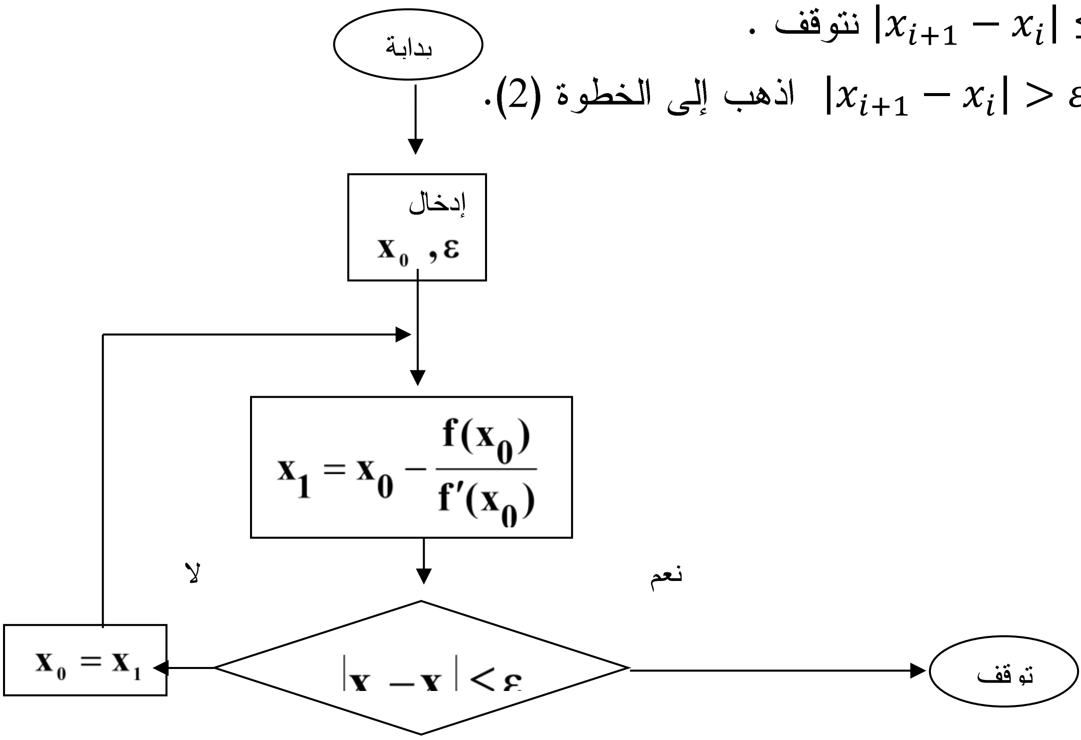
وبصورة عامة

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

نتوقف عن تكرار العمليات في حالة $|x_{i+1} - x_i|$ كمية صغيرة جدا.

خوارزمية نيوتن:-

1. إدخال قيمة x_0 (نقطة البداية) و ε (قيمة الخطأ).
2. i = 0 احسب قيمة x_1 من القانون التالي : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
3. إذا كان $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$ نتوقف .
4. أما إذا كان $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$ اذهب إلى الخطوة (2).



إعداد:

أ.يونس حازم أ.صهيب عبد الجبار

مثـال (1):ـ جد جذر المعادلة الغير الخطية التالية $f(x) = x^2 + 2.1x - 1$ بطريقة نيوتن إذا علمت بان $x_0 = 0.5, \varepsilon = 0.0035$.

الحل:

التكرار الأول:ـ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f(x_0) = f(0.5) = (0.5)^2 + 2.1(0.5) - 1 = 0.3$$

$$f'(x_0) = f'(0.5) = 2(0.5) + 2.1 = 3.1$$

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.3}{3.1} = 0.4032$$

$$|x_1 - x_0| = |0.4032 - 0.5| = 0.0968 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:ـ

$$f(x_1) = f(0.4032) = 0.0092$$

$$f'(x_1) = f'(0.4032) = 2.9064$$

$$x_2 = 0.4032 - \frac{0.0092}{2.9064} \Rightarrow x_2 = 0.40003$$

$$|x_2 - x_1| = |0.40003 - 0.4032| = 0.0031 < \varepsilon$$

سوف نتوقف عن عملية التكرار لان $|x_2 - x_1|$ اقل من ε .

مثال(2):ـ جد جذر المعادلة$x^2 - 4\,sin\,x = 0$ إذا علمت أن نقطة البداية هي 3،

sin3=0.1411

cos3= –0.9900

$$\varepsilon = 0.001$$

الحل:التكرار الأول:-

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f(x_0) = x^2 - 4\sin x \Rightarrow f(3) = (3)^2 - 4\sin 3 = 8.4355$$
$$f'(x_0) = 2(x) - 4\cos x \Rightarrow f'(x) = 2(3) - 4\cos 3 = 9.9600$$
$$x_1 = 3 - \frac{8.4355}{9.9600} \Rightarrow x_1 = 2.1531$$
$$|x_1 - x_0| = |2.1531 - 3| = 0.8469 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$f(x_1) = x^2 - 4\sin x \Rightarrow f(2.1531) = (2.1531)^2 - 4\sin(2.1531) = 1.2950$$
$$f'(x_1) = 2x - 4\cos x \Rightarrow f'(2.1531) = 2(2.1531) - 4\cos(2.1531) = 6.5060$$
$$x_2 = 2.1531 - \frac{1.2950}{6.5060} \Rightarrow x_2 = 2.1531 - 0.1990 = 1.9541$$
$$|x_2 - x_1| = |1.9541 - 2.1531| = 0.1990 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$f(x_2) = x^2 - 4\sin x \Rightarrow f(1.9541) = 0.1082$$
$$f'(x_2) = 2x - 4\cos x \Rightarrow f(1.9541) = 5.4041$$
$$x_3 = 1.9541 - \frac{0.1082}{5.4041} = 1.9340$$
$$|x_3 - x_2| = |1.9541 - 1.9340| = 0.0201 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$\Rightarrow x_4 = 1.9340 - 5.2891 \Rightarrow x_4 = 1.9338$$
$$|x_4 - x_3| = |1.9338 - 1.9340| = 0.0002 < \varepsilon$$

سوف نتوقف عن عملية التكرار لان$|x_4 - x_3|$ اقل من ε

الفصل الثالث

الحل العددي لنظام المعادلات الخطية

Numerical Solutions of Set of Equations

إن كثيرا من المســـائل في بعض المجالات العلمية وفي التحليل العددي يتطلب حلها معرفة بعض طرق الحلول العددية. لمنظومات المعادلات الخطية الآنية .فالحلول العددية للمعادلات التفاضــلية الاعتيادية والجزئية بطريقة الفروقات المنتهية كثيرا ما تقود إلى منظومة من المعادلات الخطية ، كما المعادلات التكاملية تعامل أحيانا بطريقة مشـابهة وموضـوع البرمجة الخطية ، الذي يتناول مســالة تصــغير دالة ما تحت شــروط معينة يعتمد ا على حلول المعادلات الآنية التي تحقق بعض المتراجحات الخطية .

لقد ذكرنا في الفصــل الســابق بعض طرق معالجة منظومات المعادلات غير الخطية ، ومن الناحية النظرية يمكن تطبيق تلك الطرق على منظومات المعادلات الخطية ، ولكن لكون هذه الأخيرة لقل تعقيدا بكثير من الأولى ولكثرة ورودها في المســـائل العملية فان هناك طرقا عددية أفضل لمعالجتها سنذكر بعضا منها في هذا الفصل .

في هذه المقدمة ، سوف نذكر بعض الخواص البسيطة للمصفوفات والتي سوف نحتاج إليها فيما بعد .

لتكن $A=(a_{ij})$ مصـــفوفة مربعة رتبتها ى حيث (i عدد الصـــفوف ، j عدد الأعمدة) للمصفوفة :

العناصر القطرية للمصفوفة : – هي عناصر a_{ij} عندما $i=j$.

العناصر غير القطرية للمصفوفة:– هي عناصر a_{ij} عندما $i\neq j$.

المصفوفة القطرية :– هي المصفوفة A التي جميع العناصر غير القطرية مساوية إلى الصفر .

المصــفوفة الأحادية :– هي المصــفوفة القطرية التي يكون كل عنصــر من عناصــرها القطرية يساوي واحد ويرمز لها بالرمز I .

المصفوفة فوق القطرية :– هي العناصر a_{ij} من المصفوفة A بحيث $i<j$.

المصفوفة تحت القطرية :– هي العناصر a_{ij} من المصفوفة A بحيث $i>j$.

المصـفوفة المثلثية السـفلية :– هي المصـفوفة A التي فيها جميع العناصـر فوق القطرية تسـاوي صفرا.

المصــفوفة المثلثية العلوية :– هي المصــفوفة A التي فيها جميع العناصــر تحت القطرية تســاوي صفرا.

المصفوفة التناظرية :– هي المصفوفة A التي فيها $a_{ij} = a_{ij}$ لكلj, i.

معكوس المصـفوفة :– هي المصــفوفة A مضــروبة بالمصــفوفة X بحيث إن $AX = I = XA$ أي إن X مصـفوفة هي معكوس للمصـفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} . وتسـمى A مصـفوفة قابلة للعكس إذا كان لها معكوس . ومما تجدر الإشـارة إليه هنا هو إن معكوس المصـفوفةA يمكن إيجاده من العلاقة $A^{-1} = Adj(A)/|A|$.

مثال على معكوس المصفوفة : المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix}$ قابلة للعكس لان:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-1 \\ 01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix} = I$$

$$I = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 01 \end{bmatrix}$

المصـفوفة المنفردة:– هي المصــفوفة A مربعة ومحددها يســاوي صــفر . وكل مصــفوفة منفردة ليس لهل معكوس.

خواص المصفوفات

1. إذا كلنت كل منA, B مصـــــفوفة غير منفردةـفان $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ كذلك بما إن $|AB| = |A||B|$ وان$AA^{-1} = I$ ـفان $|A^{-1}||A| = |I| = I$ وهذا يعني إن $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
2. محدد المصـفوفة القطرية يسـاوي حاصـل ضـرب عناصـرها القطرية وهذا ينطبق أيضـا على المصفوفات المثلثية السفلية والعلوية .
3. إذا كانت A مصــفوفة مربعة فان المصــفوفة المنقولة عنA ويرمز لها A^T ، هي المصــفوفة التي عناصرها في الموقع ij هو a_{ij} ، إذا كانت $A = [a_{ij}]$ فان $A^T = [a_{ji}]$.
4. $|A^T| = |A|$ لكل مصفوفة .
5. يمكن تحويل أية مصـفوفة A إلى مصـفوفة مكافئة بإجراء سـلسـلة من التحويلات الابتدائية التي تتضمن الأنواع التالية:

أ– ضرب كل عنصر في أي صف (عمود) بكمية ثابتة لا تساوي صفر.

ب− ضرب عناصر أي صف (عمود) بكمية ثابتة وإضافتها إلى عناصر صف (عمود) آخر .

ج− تبديل موضع صفين (عمودين)احدهما محل الآخر في A.

6. في المصــفوفة المربعة A التحويلات الابتدائية من النوع (ب) لا تغير قيمة $|A|$ والتحويلات من النوع (ج) تؤدي إلى تغيير إشـــارة $|A|$ فقط.أما التحويلات من النوع (أ) تؤدي إلى ضرب $|A|$ بتلك الكمية الثابتة.

منظومات المعادلات الخطية

يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من m من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل بالشكل الأتي:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ولكتابتها باستخدام المصفوفات نضع:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{m1}a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

وهنا نناقش هذا النظام ، توجد ثلاث حالات في هذا النظام:

1) إذا كانت $n > m$ أي إن إذا كان عدد المعاملات لقل من المجاهيل n فان المنظومة لها حل ولكنه ليس وحيد $x_1 + 3x_2 = 4 \Leftarrow x_1 = 4 - 3x_2$ فالمعادلة لها عدد غير منتهي من الحلول.

2) إذا كانت $n < m$ فان المنظومة قد لا يكون لها حل على الإطلاق.

3) عندما يكون $n = m$ هي إن مصفوفة المعاملات A مصفوفة مربعة وفي هذه الحالة لها حل وحيد إذا وفقط إذا المصفوفة لها معكوس ويمكن إيجاد الحل عندئذ باستخدام قاعدة كريمر .

الحلول العددية لهذا النظام الخطي

هناك نمطين من الطرق :-

النمط الأول: هو نمط الطرق المباشرة إجراء سلسلة من العمليات الحسابية مرة واحدة ، يتم الوصول إلى قيمة تقريبية للحل المطلوب ونقول الحل التقريبي وليس الحل المضبوط لان نتائج العمليات الحسابية تحتوي على بعض الأخطاء التدويرية التي يعتمد مقدارها على عدد العوامل .

النمط الثاني: هو نمط الطرق التكرارية وفيها نصل إلى الحل المطلوب عن طريق حساب تقريبات متعاقبة له.

أي إننا نبدأ بحل تقريبي لمنظومة المعادلات ، ثم تجري سلسلة من العمليات الحسابية التي تؤدي إلى حصولنا على حل تقريبي أفضل ، أي أكثر دقة . تعتبر الطريقة التكرارية متقاربة أذا كانت متتالية الحلول المتعاقبة متزليدة في دقتها وتقترب من حد ثلبت وبعكسه تعتبر الطريقة حينئذ متباعدة . ومن الجدير بالذكر انه بالإمكان دمج النوعين من الطرق للحصول على حلول أفضل .

الحل العددي لنظام المعادلات الخطية

إن حل المعادلات الخطية يعني إيجاد قيم المجاهيل التي تحقق جميع المعادلات المنظومة ويستمر الحل بشكل أساسي على عدد المجاهيل حيث عدد المجاهيل يرمز له بالرمز(n) وعدد المعادلات يرمز له بالرمز(m).

أولا :– إذا كان عدد المجاهيل اكبر من عدد المعادلات (n > m)فالنظام الخطيله عدد غير منتهي من الحدود

Ex:-

$$\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ \underline{\mp x_1 \mp x_2 \mp x_3 = 3} \end{array}$$

بطرح المعادلتين نحصل على $-3x_2 = -2 \Rightarrow$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية ينتج :

$$x_1 + \left(\frac{2}{3}\right) + x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - \frac{2}{3} - x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{3} - x_3$$

ثانيا :– إذا كان عدد المجاهيل اقل من عدد المعادلات (n < m) عندئذ قد لا يكون للنظام الخطي حل .

Ex:–

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_1 + 3x_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_1 + 5x_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{array}$$

بحل المعادلة (1) مع (2) نحصل على :

$x_2 = 1, x_1 = -1$ نعوض القيمتين بالمعادلة (3) ، بما إن الطرف الأيمن لا يساوي الطرف الأيسر اذاً لا يكون للنظام الخطي حل لذلك فان المعادلات أعلاه ليس لها حل لان عدد المجاهيل اقل من عدد المعدلات.

ثالثا:– إذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات (n = m) عندئذ يوجد حل في النظام الخطي وهو الحل الوحيد.

Ex1:

Ex2:

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \ldots\ldots (1) \\ x_1 + 3x_2 = 1 \ldots\ldots (2) \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2\ldots\ldots(1) \\ 3x_1 - x_2 &= 1\ldots\ldots(2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{5}{4}$$

ملاحظة :- لتكن A مصفوفة مربعة غير شاذة تكون العبارة التالية متكافئة :

1. النظام الخطي المتجانس (Ax = 0) له حل وحيد وهو الحل الصفري .
2. النظام الخطي Ax = b له حل وحيد غير صفري .
3. المحدد لـ Aهو $|A| \neq 0$ ونرمز له $\det(A)$.

إيجاد حلول أنظمة المعادلات الخطية في المصفوفة المربعة غير الشاذة :-

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &. \\ &. \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{n1}a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

الآن يمكن كتابة النظام الخطي بالشكل التالي Ax = b .

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{n1}a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

بشرط $|A| \neq 0$.

Ex:–

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ax =b $\Rightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

الطرق المباشرة:

1- طريقة الحذف لكاوس: Method Gaussian Elimination

تعتبر من ابسط الطرق المباشرة لحل منظومات المعادلات الخطية. وهي شكل منظم لطريقة الحذف المعروفة في كتب الرياضيات المدرسية.ويمكن توضيحها بما يلي في البداية سوف نختار منظومة من المعادلات الخطية المتكونة من m من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل كما في الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

سوف نقوم بكتابة هذه المعادلات الخطية كما يلي وذلك لغرض السهولة:

$$\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{matrix}$$

وتتلخص الطريقة بتحويل المصفوفة الاعتيادية إلى مصفوفة مثلثيه عليا وذلك بالحذف الأمامي لمعاملات المجاهيل التي تقع تحت عناصر القطر الرئيسي بشكل متتالي بعدها تبدأ عملية عكسية (تعويض تراجعي) لإيجاد المجاهيل وكما هو موضح في الترتيب التالي

$$\left.\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
0 & a'_{22} & \cdots & a_{2n} & b'_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a'''_{nn} & b'''_n
\end{matrix}\right\}\text{الحذف الأمامي}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_n = b'''_n / a'''_{nn}\\
&\vdots\\
&x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3 \cdots - a'_{2n}x_n)/a'_{22}\\
&x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11}
\end{aligned}\right\}\text{التعويض التراجعي}$$

مثال:حل منظومة المعادلات التالية.

$$\begin{array}{llllll} a & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 5 \\ b & 4x_1 & +4x_2 & -3x_3 & = 3 \\ c & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 1 \end{array}$$

لحذف x_1 من المعادلة b نضيف المعادلة المتكونة من ضرب المعادلة a بالعدد 2-=4/2- إلى المعادلة b

ولحذف x_1 من المعادلة c نضيف المعادلة المتكونة من ضرب المعادلة a بالعدد 2/2=1 إلى المعادلة c وهذا ينتج المعادلات التالية:

$$\begin{array}{llllll} a' & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 5 \\ b' & 0 & -2x_2 & -x_3 & = -7 \\ c' & 0 & +6x_2 & -2x_3 & = 6 \end{array}$$

ولحذف x_2 من المعادلة c'نضيف المعادلة المتكونة من ضرب المعادلةb' بالعدد 6/-2=3- إلى المعادلة c'وهذا ينتج المعادلات التالية:

$$\begin{array}{llllll} a'' & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 5 \\ b'' & 0 & -2x_2 & -x_3 & = -7 \\ c'' & 0 & 0 & -5x_3 & = -15 \end{array}$$

وللحصول على قيم x باستخدام التعويض التراجعي وكما يلي:

$$-5x_3 = -15 \Rightarrow x_3 = -15/-5 = 3$$
$$-2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow x_2 = (-7 + x_3(3))/-2 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = (5 - 3x_2 + x_3)/2 = 1$$

مثال(واجب):حل منظومة المعادلات التالية باستخدام طريقة كاوس

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

1- طريقة كاوس – جوردن Gauss – Jordan Method

إن هذه الطريقة تستخدم لحل منظومة المعادلات الخطية Ax = b وفي هذه الطريقة سوف تختزل المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية بعد n من الخطوات وهذا يتطلب المزيد من العمليات الحسابية ثم حساب الحل فيما بعد بطريقة مباشرة .

خوارزمية طريقة كاوس – جوردن :-

في البداية سوف نختار منظومة من المعادلات الخطية المتكونة من m من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل كما في الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

سوف نقوم بكتابة هذه المعادلات الخطية كما يلي وذلك لغرض السهولة:

$$\begin{array}{lcccccc}
a: & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \cdots\ (1)\\
b: & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 & \cdots\ (2)\\
c: & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n & \cdots\ (3)
\end{array}$$

1-. الخطوة الأولى:

أ- نضرب المعادلة (1) بـــ $(-/a_{11}a_{21})$ لنحصل على المعادلة (4).

ب- نضيف المعادلة (2) إلى المعادلة (4) لنحصل على المعادلة (5).

ج- نضرب المعادلة (1) بـ $(-a_{11}/a_{n1})$ لنحصل على المعادلة (6).

د- نضيف المعادلة (3) إلى المعادلة (6) لنحصل على المعادلة (7) من هذه الخطوة سوف نحصل على منظومة معادلات:

$$\begin{array}{lcccccc}
a^{(1)}: & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \cdots\ (1)\\
b^{(1)}: & 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 & \cdots\ (5)\\
c^{(1)}: & 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & b'_n & \cdots\ (7)
\end{array}$$

2. الخطوة الثانية :-

أ- نضرب المعادلة (5) بـــ $(-a_{32}/a_{22})$ لنحصل على المعادلة (8).

ب- نضيف المعادلة (7) إلى المعادلة (8) لنحصل على المعادلة (9).

ج- نضرب المعادلة (5) بـ $(-a_{12}/a_{22})$ لنحصل على المعادلة (10).

د- نضيف المعادلة (1) إلى المعادلة (10) لنحصل على المعادلة (11).

من هذه الخطوة سوف نحصل على المنظومة المكافئة:

$$\begin{array}{lcccccccc} a^{(2)}: & a'_{11} & 0 & \cdots & a'_{1n} & b_1 & \cdots & (11) \\ b^{(2)}: & 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 & \cdots & (5) \\ c^{(2)}: & 0 & 0 & \cdots & a''_{nn} & b''_n & \cdots & (9) \end{array}$$

3. الخطوة الثالثة :-

a. نضرب المعادلة (11) بـــ $(-a_{1n}/a_{nn})$ لنحصل على المعادلة (12).

b. نضيف المعادلة (12) إلى المعادلة (9) لنحصل على المعادلة (13).

c. نضرب المعادلة (11) بـ $(-a_{2n}/a_{nn})$ لنحصل على المعادلة (14).

d. نضيف المعادلة (14) إلى المعادلة (5) لنحصل على المعادلة (15).

ومن هذه الخطوة سوف نحصل على:

$$\begin{array}{lcccccccc} a^{(3)}: & a''_{11} & 0 & \cdots & 0 & b''_1 & \cdots & (13) \\ b^{(3)}: & 0 & a''_{22} & \cdots & 0 & b''_2 & \cdots & (15) \\ c^{(3)}: & 0 & 0 & \cdots & a''_{nn} & b''_n & \cdots & (11) \end{array}$$

وفي هذه الخطوات تحولت المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية ولإيجاد الحل لا حاجة لنا إلى التعويض المتراجع كما في طريقة كاوس لان كل معادلة سوف تحتوي على مجهول ولحد فقط ويمكن إيجاده بطريقة مباشرة ليعطي قيم $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ كالأتي :

$$x_1 = b''_1/a''_{11}$$
$$x_2 = b''_2/a''_{22}$$
$$x_3 = b''_3/a''_{33} \qquad \Rightarrow x_n = b''_{n/}/a''_{nn}$$

مثال:- باستعمال طريقة كاوس – جوردن جد حل لمنظومة المعادلات الآنية التالية:

$$\begin{array}{cccccc} 4x_1 & -9x_2 & +2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & -4x_2 & +6x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 4 \end{array}$$

الحل:-

$$\begin{array}{lcccccc} a: & 4 & -9 & 2 & 5 & \cdots & (1) \\ b: & 2 & -4 & 6 & 3 & \cdots & (2) \\ c: & 1 & -1 & 3 & 4 & \cdots & (3) \end{array}$$

أ)الخطوة الأولى :– المعادلة (1) نضربها بــ (-2/4) لنحصل على المعادلة (4)

$$\begin{array}{cccc} (4 & -9 & 2 & 5) \quad \times -2/4 \\ -2 & 4.5 & -1 & -2.5 \end{array}$$

نضيف المعادلة (2) إلى المعادلة (4)

$$\begin{array}{cccccc} -2 & 4.5 & -1 & -2.5 & \cdots & (4) \\ 2 & -4 & 6 & 3 & \cdots & (2) \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 & \cdots & (5) \end{array}$$

وتمثل المعادلة (5) القيمة $b^{(1)}$ ،

نضرب المعادلة (1) ب (-1/4)

$$\begin{array}{cccccc} (4 & -9 & 2 & | & 5) & \times -1/4 \\ -1 & 2.25 & -0.5 & | & -1.25 & \cdots (6) \end{array}$$

نضيف المعادلة (3) إلى المعادلة (6) نحصل على

$$0 \quad 1.25 \quad 2.5 \quad 2.75 \quad \cdots (7)$$

وهذه تمثل قيمة$c^{(1)}$.

ومن هذه الخطوة نحصل على المعادلات التالية:

$$\begin{array}{lcccccc} a^1: & 4 & -9 & 2 & 5 & \cdots & (1) \\ b^1: & 0 & 0.5 & 5 & 0.5 & \cdots & (5) \\ c^1: & 0 & 1.25 & 2.5 & 2.75 & \cdots & (7) \end{array}$$

ب) الخطوة الثانية :– في المعادلة (5) نضربها بــ (-1.25/0.5)

$$\begin{array}{cccccc} (0 & 0.5 & 5 & | & 0.5) & \times -1.25/0.5 \\ 0 & -1.25 & -12.5 & | & -1.25 & \cdots (8) \end{array}$$

نضيف المعادلة (7) إلى (8)

$$\begin{array}{ccccc} (0 & -1.25 & -12.5 & | & -1.25) \\ 0 & 1.25 & 2.5 & | & 2.75 \end{array} \quad \text{بالجمع}$$

$$0 \quad 0 \quad -10 \quad 1.5 \quad \cdots (9)$$

تمثل هذه قيمة$c^{(2)}$، نضرب المعادلة (5) ب (9/0.5).

$$\begin{array}{cccccc} (0 & 0.5 & 5 & | & 0.5) & \times 9/0.5 \\ 0 & 9 & 90 & | & 9 & (10) \end{array}$$

نضيف المعادلة (1) إلى المعادلة (10) نحصل على

$$4 \quad 0 \quad 92 \quad 14 \quad \cdots (11)$$

وتمثل هذه قيمة $a^{(2)}$.

$$\begin{array}{lccccll} a^2: & 4 & 0 & 92 & 14 & \cdots & (11) \\ b^2: & 0 & 0.5 & 5 & 0.5 & \cdots & (5) \\ c^2: & 0 & 0 & -10 & 1.5 & \cdots & (9) \end{array}$$

ج) الخطوة الثالثة :– نضرب المعادلة (9) بـــ (-92/-10)

$$\begin{array}{cccccc} (0 & 0 & 10 & | & 1.5) & \times 92/10 \\ 0 & 0 & -92 & | & 13.8 & \cdots (12) \end{array}$$

نضيف المعادلة (11) إلى المعادلة (12) نحصل على

$$4 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 27.8 \quad \cdots (13)$$

وتمثل هذه $a^{(3)}$.

نضرب المعادلة (9) بـ (-5/-10)

$$\begin{array}{cccccc} (0 & 0 & -10 & | & 1.5) & \times 5/10 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0.75 & \cdots (14) \end{array}$$

نضيف المعادلة(6) إلى (14) فنحصل على المعادلة التالية:

$$00.50 \quad |1.25 \ldots\ldots\ldots (15)$$

وتمثل هذه قيمة $b^{(3)}$.

من هذه الخطوات سوف نحصل على :–

$$\begin{array}{lccccll} a^3: & 4 & 0 & 0 & 27.8 & \cdots & (13) \\ b^3: & 0 & 0.5 & 0 & 1.25 & \cdots & (15) \\ c^3: & 0 & 0 & 10 & 1.5 & \cdots & (9) \end{array}$$

بما أن المعادلة تحتوي على مجهول واحد فقط إذن يمكن إيجاد قيم x مباشرة كما يلي:–

$$\boldsymbol{x_1 = 27.8/4 = 6.95}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 1.25/0.5 = 2.5}$$
$$\boldsymbol{x_3 = 1.5/-10 = 0.15}$$

ونستطيع أيضا إيجاد المحدد من خلال ضرب العناصر القطرية كالأتي :–

$$|A| = 4 \times 0.5 \times (-10) = -20$$

مثال(واجب):حل منظومة المعادلات التالية باستخدام طريقة كاوس−جوردن

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +2z & = & 9 \\ 2x & +4y & -3z & = & 1 \\ 3x & +6y & -5z & = & 0 \end{array}$$

Q2

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 4$$
$$4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 6$$
$$-x_2 + x_4 = -4$$
$$-3x_3 + x_4 = -1$$

Q3

$$\begin{array}{ccccc} -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & -7x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array}$$

2- طريقة التحليل المثلثي
Triangular Decomposition Methods(L.U)

نظام المعادلات الخطية(L.U):

ليكن لدينا النظام

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{n1}a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

يمكن كتابة المصفوفة A بالشكل التالي:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11}0\ldots\ldots 0 \\ L_{21}L_{22}\ldots\ldots 0 \\ L_{31}L_{32}L_{33} \\ . \\ . \\ L_{n1}L_{n2}\ldots\ldots L_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1U_{12}U_{13}\ldots\ldots U_{1n} \\ 01U_{23}\ldots\ldots U_{2n} \\ 001\ldots\ldots U_{3n} \\ . \\ . \\ 000\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L \times U$$

مثال :- بأخذ المصفوفة (4×4).

الحل /

A=L × U

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{24} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & L_{11}U_{14} \\ L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22} & L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23} & L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24} \\ L_{31} & L_{31}U_{12}+L_{32} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33} & L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34} \\ L_{41} & L_{41}U_{12}+L_{42} & L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43} & L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{L_{11}=a_{11}} \\ \mathbf{L_{21}=a_{21}} \\ \mathbf{L_{31}=a_{31}} \\ \mathbf{L_{41}=a_{41}} \end{matrix}\right\} \mathbf{L_{i1}=a_{i1}} \quad , \quad \left.\begin{matrix} a_{12}=L_{11}U_{12} \\ a_{13}=L_{11}U_{13} \\ a_{41}=L_{11}U_{14} \end{matrix}\right\} U_{1j}=\frac{a_{1j}}{L_{11}},$$

خوارزمية طريقة التحليل المثلثي:

1. نجد $L_{i1} = a_{i1} i = 1,2,\ldots\ldots,n$
2. نجد $U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}} \quad j = 2,3,\ldots\ldots,n$
3. نجد $L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}$
4. نجد $U_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} L_{ji}U_{ik}}{L_{jj}} k = j+1,\ldots\ldots$
5. نجد $L_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}U_{kn}$
6. $LUx = b \Leftarrow Ax = b$
7. نفرض ان $Ux = y$
8. وهذا يؤدي الى $Ly = b$

نحصل على قيمة (y) نعوضها في المعادلة (7) نحصل على قيمة (x).

مثال:–حل نظام المعادلات الخطية باستخدام طريقة (LU–F).

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

الحل/

$$A = \begin{bmatrix} 3-12 \\ 123 \\ 2-2-1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_{11}00 \\ L_{21}L_{22}0 \\ L_{31}L_{32}L_{33} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1U_{12}U_{13} \\ 01U_{23} \\ 001 \end{bmatrix}$$

$1) L_{i1} = a_{i1} i = 1,2,3,\ldots\ldots$

$L_{11} = a_{11} = 3$
$L_{21} = a_{21} = 1$
$L_{31} = a_{31} = 2$
$2) U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}} j = 2,3, \ldots\ldots$

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = \frac{-1}{3}$$

$$U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = \frac{2}{3}$$

$$3) L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12} = 2 - 1(-\frac{1}{3}) = \frac{7}{3}$$

$$4) U_{23} = \frac{a_{23} - L_{21}U_{13}}{L_{22}} = \frac{3 - (1)(\frac{2}{3})}{\frac{7}{3}} = 1$$

$$5) L_{32} = a_{32} - L_{31}U_{12} = -2 - (2)(-\frac{1}{3}) = \frac{-4}{3}$$

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23} = -1 - (2)(\frac{2}{3}) - (\frac{-4}{3})(1) = -1$$

$$L = \begin{bmatrix} 300 \\ 17/30 \\ 2 - 4/3 - 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 - 1/32/3 \\ 011 \\ 001 \end{bmatrix}$$

$6) Ax = b \Rightarrow Ux = y$
$7) \because Ux = y \Rightarrow Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 17/30 \\ 2 - 4/3 - 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3y_1 = 12 \Rightarrow y_1 = 4$$

$$y_1 + \frac{7}{3} y_2 = 11 \Rightarrow y_2 = 3$$

$$2y_1 - \frac{4}{3} y_2 - y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 2$$

من المعادلة (7) نحصل على قيمة x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{bmatrix} 1 - 1/32/3 \\ 011 \\ 001 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = 4$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 = 2$$

$$\therefore x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$$

الطرق التكرارية

1– طريقة جاكوبي Jacobi Method

في طريقة جاكوبي نختار المصفوفة (R) لتكون المصفوفة القطرية التي عناصرها القطرية تساوي (a_{ij}) وبذلك تكون العناصر القطرية في المصفوفة P=R–A مساوية إلى الصفر وعناصرها غير القطرية هي نفس عناصر(A) المناظرة بعكس الإشارة وهكذا بتعويض P,R في المعادلة $Rx^{(r)} = Px^{(r-1)} + b, r = 1,2, \ldots\ldots.$

نجد أن عناصر المتجه $x^{(r)}$ في الخطوة r من العملية التكرارية يمكن أن تحسب كالأتي:

$$x_i^{(r)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(r-1)})i = 1,2, \ldots, n, r = 1,2, \ldots\ldots$$

كما هو واضح في الصيغة أعلاه فلنه يمكن تطبيقها عندما تكون $a_{ij} \neq 0$ لجميع قيم $i = 1,2, \ldots\ldots, n$.

- شرط التوقف لهذه الطريقة هو:

$$|x^{r+1} - x^r| < \in$$

$$|[x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \ldots, x_n^{r+1}] - [x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r]| = |(x_1^{r+1} - x_1^r), (x_2^{r+1} - x_2^r), \ldots, (x_n^{r+1} - x_n^r)| < \in$$

ملاحظة: ترتب المعادلات بحيث يكون a_{11} اكبر(او يساوي) معامل في المعادلة الاولى ونرتب a_{22} بحيث يكون اكبر(اويساوي) معامل في المعادلة الثانية وهكذا على جميع المعادلات اي ان a_{ii} يكون اكبر (او يساوي) معامل في المعادلة i

تسمى هذه العملية شرط التقارب

- ملاحظة: اذا لم تعطى بالحل قيمة ابتدائية نبدا بالقيم [0,0,…,0]

مثال:– جد الحل التقريبي لمنظومة المعادلات

$$
\begin{aligned}
10x_1 + x_2 + x_3 &= 12\\
x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12\\
x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

الحل/ نكتب المعادلات بالشكل الاتي:

$$
\begin{aligned}
10x_1^{(r+1)} &= 12 - x_2^{(r)} - x_3^{(r)}\\
10x_2^{(r+1)} &= 12 - x_1^{(r)} - x_3^{(r)}\\
10x_3^{(r+1)} &= 12 - x_1^{(r)} - x_2^{(r)}
\end{aligned}
$$

عندما $r=0$ نختار أية قيمة تقريبية لمتجه الحل (x) ولتكن(0) مثلا $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ ثم نحسب قيمة كل من $(x_3^{(r)}, x_2^{(r)}, x_1^{(r)})$: من المعادلات أعلاه بشكل متتابع ونوقف العملية التكرارية حال حصولنا للدقة المرغوبة، والجدول الاتي يبين التقريبات المتتالية للحل:–

r	$x_1^{(r)}$	$x_2^{(r)}$	$x_3^{(r)}$
0	0.0	0.0	0.0
1	1.2	1.2	1.2
2	0.96	0.96	0.96
3	1.008	1.008	1.008
4	0.9984	0.9984	0.9984
5	1.00032	1.00032	1.00032
6	0.999936	0.999936	0.999936

مثال 2:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 13\\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 9
\end{aligned}
$$

مثال 3:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1\\
x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 2\\
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

مثال 4:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 7 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

إعداد:
أ.يونس حازم أ.صهيب عبد الجبار

2–طريقة كاوس – سيدل Gauss – Seidel Method

لاحظنا في طريقة جاكوبي انه لحساب عناصر المتجه $x^{(r)}$ تستعمل عناصر المتجه $x^{(r-1)}$ فقط في الزمن الذي تكون فيه بعض عناصر $x^{(r)}$ (التي هي أكثر دقة من عناصر $x^{(r-1)}$ بالطبع) قد تم حسابها.

طريقة كاوس سيدل هي تحوير بسيط لطريقة جاكوبي،حيث انه في الخطوة (r) تستعمل العناصر التي تم حسابها من المتجه $x^{(r)}$ لحساب العناصر الأخرى فيه.ولذلك يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة كاوس سيدل كالأتي:–

$$x_i^{(r)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(r)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(r-1)}\right) i = 1,2,\ldots,n, r = 1,2,\ldots\ldots$$

$$Ex: -10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

الحل/

$$10x_1^{(r+1)} = 12 - x_2^{(r)} - x_3^{(r)}$$
$$10x_2^{(r+1)} = 12 - x_1^{(r+1)} - x_3^{(r)}$$
$$10x_3^{(r+1)} = 12 - x_1^{(r+1)} - x_2^{(r+1)}$$
$$r = 0 \quad x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

قيمة $x_1 \Leftarrow$

$$10x_1^{(1)} = 12 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)} = 12/10 = 1.2$$
$$10x_2^{(1)} = 12 - x_1^{(1)} - x_3^{(0)} \Rightarrow 10x_2 = 12 - 1.2 \Rightarrow x_2 = \frac{10.8}{10} = 1.08$$
$$10x_3^{(1)} = 12 - 1.2 - 1.08 \Rightarrow 10x_3 = 9.72 \Rightarrow x_3 = \frac{9.72}{10} = 0.972$$

r	$x_1^{(r)}$	$x_2^{(r)}$	$x_3^{(r)}$
0	0	0	0
1	1.2	1.08	0.972
2	0.9948	1.0033	1.00019
3	0.99965	1.000016	1.000033

من الجدول أعلاه نستطيع أن نلاحظ أن التقارب في طريقة كاوس– سيدل أسرع منه في طريقة جاكوبي، ففي ثلاث خطوات حصلنا على نفس الدقة أو ربما أحسن من الدقة التي حصلنا عليها في طريقة جاكوبي بست خطوات.

لدراسة موضوع التقارب في الطرق التكرارية،نناقش المنظومة الآتية:–

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4$$

في الجدول الأتي ندون الخطوات العشرة الأولى باستعمال طريقة كاوس – سيدل:

r	$x_1^{(r)}$	$x_2^{(r)}$	$x_3^{(r)}$
1	0.33	–1.48	–0.26
2	0.86	–1.17	0.74
3	0.97	0.55	0.15
4	0.20	–1.88	–0.56
5	0.77	–1.80	0.82
6	1.21	1.15	0.45
7	0.10	–1.62	–0.94
8	0.56	–2.79	0.80
9	1.53	1.76	0.94
10	0.06	–0.37	–1.36

الجدول السابق يرينا أن النتائج لا تتقارب إلى قيمة معينة،لذا فهي متباعدة.

أن موضـــوع التقارب وشـــروطه في الطرق التكرارية خارج عن نطاق هذا الكتاب لذا لن نعالجه بالتفصيل هنا، ولكن من الضروري أن نذكر أن كلا من طريقتي جاكوبي وكاوس – سيدل تتقارب عندما يتوفر الشرط

$$\underset{i}{Max} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 (1)$$

إن الشرط(1)هو شرط كاف للتقارب ولكن ليس ضروريا كما نرى في هذا المثال:–

Ex:

$$-2x_1 + 2x_2 = 1$$
$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 1$$

الحل/ يجب أن نقوم بإعادة ترتيبها

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 = 1$$
$$x_2 + x_3 = 1$$

وهنا نؤكد ضرورة تحليل المسالة قبل المباشرة بحلها سواء بالطرق المباشرة أو بالطرق التكرارية، فقد يبدو لأول وهلة أن شرط التقارب (1)لا يتوفر في بعض المنظومات ولكن إعادة ترتيبها يؤدي إلى إمكانية تطبيق الطرق التكرارية عليها. إن شرط التقارب لا يتوفر في المنظومة الآتية:–

$$x_1 - 2x_2 - 100x_3 = 300$$
$$10x_1 + x_{2+}x_3 = 24$$
$$-x_1 + 20x_2 + x_3 = 21$$

ولكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1 + x_{2+}x_3 = 24 \\ -x_1 + 20x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 2x_2 - 100x_3 = 300 \end{array}\right]$$

يجعلها تحقق شرط التقارب.

خوارزمية طريقة كاوس – سيدل التكرارية

لحل منظومة المعادلات $Ax=b$ عندما تكون العناصر القطرية في A لا تساوي صفر.

– ضع $x^{(0)} = 0$

لقيم $r = 1,2,\ldots$ حتى الدقة المطلوبة

لقيم $i = 1,2,\ldots,n$

– ضع $x_i^{(r)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{\overleftarrow{i-1}} a_{ij}\overleftarrow{x_j^{(r)}} - \sum_{j=i+1}^{\overleftarrow{n}} a_{ij}x_j^{(r-1)}\right)$

لاحظ أن بعض هذه التجميعات $(\sum)$ قد تكون خالية لبعض قيم

إن هناك أساليب عديدة لإيقاف العملية التكرارية في كل من طريقتي جاكوبي وكاوس – سيدل هو التوقف عندما يصبح

$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)}\right| < \varepsilon$ لجميع قيم $i=1,2,\ldots,n$.

أو عندما يصبح $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)})\right]^{1/2} < \varepsilon$ أو

$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)}\right| < \varepsilon$

الفصل الرابع

الاندراج　Interpolation

كثيرا ما تصـادفنا حالات في واقعنا العملي يكون المطلوب فيها تخمين قيمة غير معروفة على ضوء قيم معلومة لمجموعة من الملاحظات. فعلى سبيل المثال ترغب الدولة لاعتبارات خاصة معرفة عدد سكان مدينة بغداد في كل سنة ابتداءا من العام 1930 ولغاية 1985 .إن المعلومات المتوفرة لدى وزارة التخطيط بهذا الخصوص هي بعض الإحصائيات لعدد سكان مدينة بغداد حصلت عليها خلال التعداد السكاني للقطر في السنوات 1934،1947،1957،1965،1977 وعلى ضوء هذه البيانات علينا تخمين عدد السكان في السنوات المطلوبة .إن عملية تخمين عدد السكان في إحدى السنوات الواقعة ضمن الفترة ما بين 1934 – 1977 تسمى بالاندراج (interpolation) كما أن عملية تخمين عدد السكان في غير هذه السنين يدعى بالاستكمال (extrapolation).

يمكن وصف المسالة رياضيا كالأتي :

لدينا مجموعة منتهية من قيم دللة غير معروفة f: $f(x_0), f(x_1), \ldots\ldots, f(x_n)$ ،ونريد تخمين قيمة الدالة عند نقطة ما x^*.إذا كانت x^* واقعة ضمن مدى النقاط $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ فان عملية التخمين تسمى بالاندراج وبعكسه فان العملية تسمى عندئذ بالاستكمال.

هناك طرق عديدة لإيجاد هذه الدالة :–

1. **طريقة الرسم**: وهي من الطرق القديمة جدا وعندها نصل إلى تقريب غير جيد لوجود الخطأ الكبير في عملية تخمين الدالة.
2. **طريقة لاكرانج:** وهي طريقة شائعة الاستعمال نحصل فيها على متعددة الحدود والتي تمثل تقريب جيد للدالة.
3. الطرق التي تعتمد على مؤثرات operators مثل طريقة نيوتن التقدمية ، طريقة نيوتن التراجعية،طريقة الفروقات المركزية..... .
4. طرق تتضمن صيغ معينة للدالة الأصلية مثل دالة اسية ، دالة هندسية متعددة حدود.

▪ طريقة لاكرانج للاندراج Lagrange Interpolation Method

إن المسـالة الرياضـية تكون بالشـكل الأتي لجميع قيم $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$، هناك قيم للدالـة $f(x)$ عند هـذه النقـاط وهي على الترتيـب $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$، في طريقـة لاكرانج تعرف متعددة حدود تنطبق مع للدالـة الأصـليـة $f(x)$ في $n+1$ من النقـاط أي أن $P(x_i) = f(x_i), i = 0,1, \ldots, n$.

مثال(1):– جد تخمينا لقيمة $f(2.3)$ من جدول البيانات الأتي:

x	1.1	1.7	3.0
f(x)	10.6	15.2	20.3

الحل: بما أن عدد النقاط المعطاة هو 3 ،لـذا فان أعلى درجة لمتعددة حدود لاكرانج هو 2 أي أن

$$f(x) \simeq P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2} L_j f(x_j) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1.7)(x - 3.0)}{(1.1 - 1.7)(1.1 - 3.0)}$$

$$= \frac{1}{1.14}(x - 1.7)(x - 3.0)$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1.1)(x - 3.0)}{(1.7 - 1.1)(1.7 - 3.0)}$$

$$= \frac{1}{-0.78}(x - 1.1)(x - 3.0)$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1.1)(x - 1.7)}{(3.0 - 1.1)(3.0 - 1.7)}$$

$$= \frac{1}{2.47}(x - 1.1)(x - 1.7)$$

بتطبيق صيغة لاكرانج السابقة نحصل على:

$$= \frac{1}{1.14}(x-1.7)(x-3.0)\times(10.6) - \frac{1}{0.78}(x-1.1)(x-3.0)\times(15.2) + \frac{1}{2.47}(x-1.1)(x-1.7)\times(20.3)$$

$$= (9.29824)(x-1.7)(x-3.0) - (19.48717)(x-1.1)(x-3.0) + (8.21862)(x-1.1)(x-1.7)$$

$$= (9.29824)(x^2-4.7x+5.1) - (19.48717)(x^2-4.1x+3.3) + (8.21862)(x^2-2.8x+1.87)$$

$$= (9.29x^2 - 43.66x + 47.37 - 19.48x^2 + 79.86x + 64.28 + 8.21x^2 - 22.9x + 15.35)$$

$$= -1.98x^2 + 13.3x - 1.56$$

$$f(2.3) = -1.98(2.3)^2 + 13.3(2.3) - 1.56 = 18.53$$

مثال(2):– جد تخمين لقيمة f(3.3) باستخدام صيغة لاكرانج في جدول البيانات الأتي:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	**0**	**1**	**3**	**4**
f(x)	**−1**	**0**	**8**	**15**

ملاحظة:– [نتوقع درجة n من عدد البيانات وهي3]

$$P_3(x) = \sum_{j=0}^{3}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{3}\left(\frac{x-x_i}{x_0-x_i}\right)f(x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{3} L_j f(x_j) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{-1}{12}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}x(x-3)(x-4)$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{3(2)(-1)} = \frac{-1}{6}x(x-1)(x-4)$$

$$L_3=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{x(x-1)(x-3)}{(4)(3)}=\frac{1}{12}x(x-1)(x-3)$$

بتطبيق صيغة لاكرانج السابقة نحصل على:

$$=\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4)+\frac{1}{6}x(x-3)(x-4)\times 0-\frac{1}{6}x(x-1)(x-4)\times 8+\frac{15}{12}x(x-1)(x-3)$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}-\frac{8[x(x-1)(x-4)]}{6}+\frac{15x(x-1)(x-3)}{12}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)-16[x(x-1)(x-4)]+15[x(x-1)(x-3)]}{12}$$

$$=\frac{(x-1)[(x-3)(x-4)-16x(x-4)+15x(x-3)]}{12}$$

$$=\frac{(x-1)[x^2-7x+12-16x^2+64x+15x^2-45x]}{12}$$

$$=\frac{(x-1)(12x+12)}{12}$$

$$=(x-1)(x+1), P_3(x)=x^2-1, P_3(3.3)=10.89-1=9.89$$

مثال(3):– إذا كانت صيغة لاكرانج صحيحة لأي قيمة لـ n. برهن أنها صحيحة عندما تكون $n=1$.

الحل/ الصيغة العامة لمتعددة حدود لاكرانج هي:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots.+a_nx^n$$
$$P_n(x_j)=f(x_j), j=0,1,2,\ldots.,n$$

عندما $n=1$

x	x0	x1
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$

$$P_1(x)=a_0+a_1x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

لإيجاد a_1, a_0 نحتاج إلى معادلتين

$$\boldsymbol{P_1(x_0)=a_0+a_1x_0}$$

$$\boldsymbol{P_1(x_1)=a_0+a_1x_1}$$

بما أن $P_n(x_j)=f(x_j)$

$$\therefore \boldsymbol{a_0+a_1x_0=f(x_0)\ldots\ldots..(1)}$$
$$\boldsymbol{\mp a_0\mp a_1x_1=\mp f(x_1)\ldots\ldots(2)}$$

$$\boldsymbol{a_1(x_0-x_1)=f(x_0)-f(x_1)}$$
$$\boldsymbol{a_1=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}}$$
$$a_0x_1+a_1x_0x_1=x_1f(x_0)\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$\mp a_0x_0\mp a_1x_0x_1=\mp x_0f(x_1)$$

بجمع المعادلتين السابقتين ينتج

$$\boldsymbol{a_0(x_1-x_0)=x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}$$
$$\boldsymbol{a_0=\frac{x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}{(x_1-x_0)}}$$

نعوض قيمة a_1, a_0 في المعادلة (A)

$$\boldsymbol{P_1(x)=\frac{x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}{(x_1-x_0)}+\frac{xf(x_0)-xf(x_1)}{(x_0-x_1)}}$$
$$\boldsymbol{=\frac{x_1f(x_0)-x_0f(x_1)+xf(x_1)-xf(x_0)}{(x_1-x_0)}}$$
$$\boldsymbol{=\frac{x_1-x}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)}$$
$$\boldsymbol{P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)}$$

وهذه هي صيغة لاكرانج للاندراج

$$=\sum_{j=0}^{1}\prod_{\substack{i=0\\ j\neq i}}^{1}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}f(x_j)$$

مثال(4):- $y(1)=12, y(2)=15, y(5)=25, y(6)=30$ جد $y(4)$.

الحل/ لأربعة نقاط يتطلب العمل إيجاد $(L\ 4)$ وكما يلي:

$$L_0(x)=\frac{(x-2)(x-5)(x-6)}{(-1)(-4)(-5)}=\frac{x^3-13x^2+52x-60}{-20}$$
$$L_1(x)=\frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(1)(-3)(-4)}=\frac{x^3-12x^2+41x-30}{-20}$$
$$L_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4)(3)(-1)}=\frac{x^3-9x^2+20x-12}{-12}$$
$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(5)(4)(1)}=\frac{x^3-8x^2+17x-10}{20}$$

∴الحدودية المطلوبة هي:

$$P_3(x)=12L_0(x)+15L_1(x)+15L_2(x)+30L_3(x)$$

$$P_3 = \frac{4x^3 - 27x^2 + 233x + 510}{60}$$

لإيجاد $y(4)$ نضع $(x=4)$ فنحصل على $y(4)=12.1$.

▪ حساب الفروقات المنتهية Calculus of Finite Differences

لتكن f دالة حقيقية قيمتها معلومة في$(n-1)$ من النقاط $a+nh$ .... $a+2h$ $a+h$ التي تبعد بإبعاد متســـاوية ولتكن القيم المعلومة للدالة هي:- $y_i = f(a+ih)\ , i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$ ، يعرف الفرق الأول عند النقطة a كالأتي

$$\Delta f(a) = f(a+ih) - f(a)$$

أو أن

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

وبصورة عامة يعرف الفرق الأول عند النقطة (***a+ih***)

$$\Delta f(a+ih) = f(a+(i+1)h) - f(a+ih)$$

أو أن

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i\ , i = 0,1,2,\ldots\ldots n-1$$

وبنفس الطريقة نحسب الفروقات الثانية

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$
$$y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, i = 0,1,2,\ldots\ldots,n-2$$

وبصورة عامة

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1}(\Delta y_i) = \Delta^{k-1}(y_{i+1} - y_i)$$
$$= \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

كيفية استخراج الفرق الأول أو الفرق الثاني وهكذا.

القانون كتابته بالشكل الأتي:

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i+k-j}$$

حيث $\binom{k}{j}$ هو توافيق العدد ويحسب

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)! * j!}$$

ويدعىΔبالمؤثر operator.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-3}$
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-1}$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_{-0}$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

إذا كانت الدالة متعددة حدود من الدرجة n فان عمود الفروقات التقدمية في المرحلة n+1 يحتوي على عناصر صفرية.

مثال :- $f(x) = x^3 - 1$ معرفة على النقاط التالية:

x	0	1	2	3	4
f(x)	−1	0	7	26	63

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0 **0**	y_0 **−1**				
		1			
x_1 **1**	y_1 **0**				
			6		
		7			
x_4 **2**	y_2 **7**			**6**	
			12		
		19			**0**
x_3 **3**	y_3 **26**			**6**	
			18		
		37			
x_4 **4**	y_4 **63**				

Δهو الفرق بين y الثاني بعد طرحy الأول منه وهكذا الفرق بين y الثالث بعد طرح y الثاني منه ونستمر.

▪ الفروقات التقدمية Forward differences

مؤثر الفرق التقدمي $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

وقد عرف بهذا المصـــطلح نســـبة إلى اعتماد المؤثر على قيمة الدالة y_i والقيمة التالية لها ويمكن ملاحظة الفروقات التقدمية $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0 \ldots\ldots$.

$$\therefore \Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = (1+\Delta) y_0$$
$$y_2 = (1+\Delta) y_1 = (1+\Delta)^2 y_0$$
$$y_3 = (1+\Delta)^3 y_0$$
$$\vdots$$
$$y_m = (1+\Delta)^m y_0$$

ملاحظة/ y_2 يمكن أن نجدها كالأتي :

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1$$
$$y_2 = (1+\Delta) y_1$$

وباستخدام مفكوك ذي الحدين نحصل على:

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots\ldots..$$

وهذه الصيغة تسمى بصيغة نيوتن التقدمية للاندراج.

حيث $h = x_i - x_{i-1}$

$$m = \frac{x_m - x_0}{h}$$

مثال(1):-

Find the velocity of a rocket by using Newton interpolation polynomial at(t=150) seconds.

x(s)	0	60	120	180	240	300
v(mile/sec)	0	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.2224

الحل:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	0					
		0.0824				
60	0.0824		0.1099			
		0.1923		0.0733		
120	0.2747		0.1832		0.1029	
		0.3755		0.1762		0.4639
180	0.6502		0.3594		0.5668	
		0.7349		0.7435		
240	1.3851		1.1029			
		1.8373				
300	3.2224					

ناخذ $x_0 = 120$ وذلك لان 150 اقرب فترة الى 150

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} = \frac{150 - 120}{60} = 0.5$$

$$P(2.5) = 0.2747 + \frac{0.3755}{1!} \times 0.5 + \frac{0.3594}{2!} \times 0.5 \times (0.5 - 1) + \frac{0.7435}{3!} \times 0.5 \times (0.5 - 1)(0.5 - 2) =$$

$0.4639 mil/s.$

إعداد:

أ.يونس حازم أ.صهيب عبد الجبار

مثال(2):– في الجدول الأتي :جد عدد الطلبة الذين حصلوا على درجة اقل من 45.

الحل:

الدرجات	عدد الطلبة	x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
30–40	31	40	31				
				42			
40–50	42	50	73		9		
				51		−25	
50–60	51	60	124		−16		37
				35		12	
60–70	35	70	159		−4		
				31			
70–80	31	80	190				

ناخذ $x_0 = 40$ وذلك لان 45 اقرب فترة الى 40

m=(45−40)/10=0.5

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$= 31 + \frac{1}{2}(42) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(9) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-25) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}(37)$$

$$= 47.868$$

مثال(3):–

Construct Newton interpolation polynomial on the interval (3.5,3.7) for the function ($y=e^x$) using (h=0.05)?

الحل: تتم بداية الحل بتكوين الجدول الأتي للدالة(y) لمختلف قيم (x) وهكذا.

x	3.5	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.115	34.813	36.598	38.457	40.447

وباستخدام قاعدة نيوتن للاستكمال الأمامي:

$$P_u(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}u(u-1)(u-2) + \ldots\ldots$$

حيث أن

$$u = \frac{x - x_0}{h}, x_0 = 3.5, h = 0.05 \Rightarrow u = 20(x - 3.5)$$

يتم تركيب جدول الفروق الأمامية كالأتي:

x	$y=e^x$	Δ	Δ^2	Δ^3
3.5	33.115			
		1.698		
3.55	34.813		0.087	
		1.785		
3.60	36.598			0.005
			0.092	
		1.877		
3.65	38.475			0.003
			0.095	
		1.972		
3.80	40.447			

وعند التعويض بالصيغة أعلاه

$$P_3(x) = 33.115 + 1.698 \times 20(x-3.5) + 0.087 \times 20(x - 3.5) \times \frac{20(x-3.5)-1}{2} + \frac{0.005}{6}(20(x-3.5)) \times (20(x-3.5)-1)(20(x-3.5)-2)$$

مثال :باستخدام طريقة نيوتن للفروقات التقدمية جد تخمين للدالة عند النقطة 2 اذا كان

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
1				
				0
3			8	

5		22		
7	42			

▪ الفروقات التراجعية Backward differences

تعرف الفروقات التراجعية بـ

$$\therefore \nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$
$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$
$$= y_i - y_{i-1} - (y_{i-1} - y_{i-2}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$
$$\nabla^3 y_i = \nabla(\nabla^2 y_i)$$

بصورة عامة يعرف الفرق التراجعي ذو الرتبة k كما يأتي :

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} y_{i-j}$$

ومن هذا التعريف يلاحظ بان الفروقات التراجعية $\nabla y_0, \nabla^2 y_0, \nabla^3 y_0, \ldots\ldots$ تساوي الفروقات التقدمية $\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-2}, \Delta^3 y_{-3}, \ldots\ldots$.

جاءت هذه العلاقة إذا قلنا

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} = \Delta y_{i-1}$$

$$\boldsymbol{\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1} \Rightarrow y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \Rightarrow y_i = (1 + \Delta)\ y_{i-1} \ldots (1)}$$

$$\therefore y_{i-1} = (1 - \nabla) y_i \Rightarrow y_{i-1} = y_i - \nabla y_i \Rightarrow y_i = (1 - \nabla)^{-1} y_{i-1} \ldots\ldots\ldots (2)$$

من 1 و 2 نستنتج أن: $(1 + \Delta) = (1 - \nabla)^{-1}$

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1} \Rightarrow y_i = (y_{i-1} + \Delta y_{i-1}) \Rightarrow$$
$$y_i = (1 - \Delta) y_{i-1} \Rightarrow y_i = (1 - \nabla)^{-1} y_{i-1} \Rightarrow (1 + \Delta)^n = (1 - \nabla)^{-n}$$

بصورة عامة

$$(1+\Delta)^n = (1-\nabla)^{-n}$$

وباستخدام مفكوك ذو الحدين

$$y_m = (1-\nabla)^{-m} y_0$$

$$y_m = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتسمى بصيغة نيوتن التراجعية للاندراج.

مثال(1):– جد تخمين لعدد الطلبة الذين حصلوا على درجة اقل من 75.

الحل/بنفس الطريقة السابقة في مثال (2).

الدرجات	عدد الطلبة	x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4
30–40	31	40	31				
				42			
40–50	42	50	73				
					9		
				51			
50–60	51	60	124			−25	
					−16		
				35			37
60–70	35	70	159			12	
					−4		
				31			
70–80	31	80	190				

نختار هنا x_0=80 لان 75 اقرب الى الفترة 80

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{x_m - x_0}}{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{75-80}}{\mathbf{10}} = \mathbf{-0.5}$$

$$y_m = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 190 + \frac{-1}{2}(31) + \frac{-0.5(-0.5+1)}{2!}(-4) + \frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!}(12) + \frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+3)}{4!}(37) = 173.3$$

مثال(2):– Given the following function $y = log_{10}x$ find $y = log_{10}1044$ for $(x=1000(10)(1050)$by using interpolation.

الحل/ نكون جدول الفروق كما يلي:

x	y=log10x	∇	∇^2	∇^3
1000	3.00000			
		0.00432		
1010	3.00432			
			−0.00004	
		0.00428		
1020	3.00860			
				−0.0001
			−0.00005	
		0.00423		
1030	3.01283			
				0.000023
			−0.000027	
		0.0041203		
1040	3.017033			
				−0.00002
			−0.000074	
		0.004156		
1050	3.021189			

ناخذ $x_0 = 1040$ وذلك لان 1044 اقرب الى 1040 منها الى 1050

x_n=1040

$$\therefore u = \frac{x_m - x_0}{h} = \frac{1044 - 1040}{10} = 0.4$$

لكون أن (x) تقع في نهاية الجدول نستخدم علاقة الاستكمال العكسي فنجد:

$$P_3(x) = log_{10} 1\,044$$

$$= 3.017033 + \frac{0.004156}{1!} \times (-0.6)$$

$$+ \frac{(-0.000047)}{2!} \times (-0.6)(-0.6 + 1)$$

$$+ \frac{(-0.00002)}{3!} \times (-0.6)(-0.6 + 1)(-0.6 + 2) = 3.01887005$$

مثال : جد تخميل للدالة $f(x) = x^3 - 2x + 1$ عند النقطة 5.3 و 5.9 و 4.8 باستخدام طريقة نيوتن الخلفية اذا كان x=1,2,…6

الحل :

نكتب جدول الفروق

x	y=$x^3 - 2x + 1$	∇	∇^2	∇^3	
1	0				
		5			
2	5		12		
		27		6	0
3	22		18		
		35		6	0
4	57		24		
		59		6	
5	116		30		
		86			
6	205				

ناخذ $x_0 = 5$ وذلك لان 5.3 اقرب الى 5 منها الى 6

$$m = \frac{x_m - x_n}{h} = \frac{5.3 - 5}{1} = 0.3$$

$$P_3(x) = f(5.3) = 116 + \frac{59}{1!} \times (0.3) + \frac{(24)}{2!} \times (0.3)(0.3 + 1)$$
$$+ \frac{(6)}{3!} \times (0.3)(0.3 + 1)(0.3 + 2) = 139.277$$

نحسب تخمين ل 5.9 نكتب جدول الفروق

x	y=x^3-2x+1	∇	∇^2	∇^3	
1	0				
		5			
2	5				
			12		
					0
		27		6	
3	22				
			18		
					0
		35		6	
4	57				
			24		
		59		6	
5	116				
			30		
		86			
6	205				

ناخذ $x_0 = 6$ وذلك لان 5.9 اقرب الى 6 منها الى 5

$$m = \frac{x_m - x_n}{h} = \frac{5.9-6}{1} = -0.1$$

$$P_m(x) = f(5.9) = 205 + \frac{86}{1!} \times (-0.1) + \frac{(24)}{2!} \times (-0.-)(-0.1+1)$$

$$+\frac{(6)}{3!} \times (-0.1)(-0.1+1)(-0.1+2) = 194.579$$

نحسب تخمين ل 4.8 نكتب جدول الفروق

x	y=x^3-2x+1	∇	∇^2	∇^3	
1	0				
		5			
2	5		12		
		27		6	0
3	22		18		
		35		6	0
4	57		24		
		59		6	
5	116		30		
		86			

				205	6

ناخذ $x_0 = 5$ وذلك لان 4.8 اقرب الى 5 منها الى 4

$$m = \frac{x_m - x_n}{h} = \frac{4.8 - 5}{1} = -0.2$$

$$P_m(x) = f(4.8) = 116 + \frac{59}{1!} \times (-0.2) + \frac{(24)}{2!} \times (-0.2)(-0.2+1)$$
$$+ \frac{(6)}{3!} \times (-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2) = 101.992$$

▪ الفروقات المنتهية النسبية Divided differences

إن صيغ الاندراج الواردة في المباحث السابقة والتي تعتمد على الفروقات المنتهية الاعتيادية لا يمكن استخدامها عندما تكون قيم الدالة معلومة في نقاط لا تكون متساوية الأبعاد.وذلك لان الفروقات المستعملة في تلك الصيغ لا تعتمد على التغير في قيم المتغير المستقل ،علينا إذن إيجاد نوع آخر من الفروقات للذي يأخذ بعين الاعتبار هذا التغير ،يطلق على الفروقات التي تفي بهذا الغرض بالفروقات النسبية.

لتكن لدينا مجموعة النقاط الآتية: $\{(x_i, y_i), i = 0,1,\ldots\ldots,n\}$ حيث $y_i = f(x_i)$ وان قيم x_i ليست بالضرورة أن تكون تصاعدية أو تنازلية. يعرف الفرق النسبي ذو الرتبة الأولى كما يلي:

$$\Delta!\, y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

ويعرف الفرق النسبي ذو الرتبة الثانية:

$$\Delta!^2\, y_i = \frac{\Delta!\, y_{i+1} - \Delta!\, y_i}{x_{i+2} - x_i} i = 0,1,2,\ldots,n-2$$

بصورة عامة، يعرف الفرق النسبي ذو الرتبة k كما يلي:

$$\Delta!^k\, y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i} i = 0,1,2,\ldots,(n-k)$$

ملاحظة:ـ

$$\Delta!\, y_i = \frac{\Delta y_i}{x_{i+1} - x_i}, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

لتكوين جدول الفروقات النسـبية نتبع أسـلوبا مشـابها لتكوين جدول الفروقات الاعتيادية ونوضحه في الجدول أدناه:

x	y			
x0	y0			
		$\Delta!\, y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$		
x1	y1			
		$\Delta!\, y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\Delta!^2\, y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$	
x2	y2			$\Delta!^3\, y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$
		$\Delta!\, y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\Delta!^2\, y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	$\Delta!^3\, y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$
x3	y3			
		$\Delta!\, y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$	$\Delta!^2\, y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2}$	$\Delta!^3\, y_2 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{x_5 - x_2}$
x4	y4		$\Delta!^2\, y_3 = \frac{\Delta y_4 - \Delta y_3}{x_5 - x_3}$	
		$\Delta!\, y_4 = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$		
x5	y5			

ملاحظة: إذا كانت مجموعة البيانات من متعدد حدود من الدرجة n فان العمود (n+1) في جدول الفروقات النسبية يحتوي على عناصر صفرية.

يعرف الفرق النسبي للدالة f عند النقطتين x_j، x_i كالآتي:

$$f[x_j, x_i] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, i \neq j$$

يمكن استخدام التعريف أعلاه على النقطتين x_{i+1}، x_i لنحصل على:

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\Delta y_i$$

وكذلك

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}=\Delta^2 y_i$$

$$\therefore f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]=\Delta^3 y_i$$

تتصف الفروقات النسبية بخاصية التناظر أي أن: $f[x_i,x_{i+1}]=f[x_{i+1},x_i]$

وكذلك

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=f[x_{i+1},x_i,x_{i+2}]$$
$$=f[x_{i+1},x_{i+2},x_i]$$
$$=f[x_{i+2},x_i,x_{i+1}]$$

يمكن استخدام الفروقات النسبية لإيجاد تخمين الدالة عند نقطة معينة، x_m وذلك كما يلي:

$$f[x_0,x_m]=\frac{f(x_m)-f(x_0)}{x_m-x_0}$$
$$f(x_m)-f(x_0)=f[x_0,x_m](x_m-x_0)$$
$$\therefore f[x_m]=f(x_0)+(x_m-x_0)f[x_0,x_m]$$
$$f\left[x_0,x_{1,}x_m\right]=f\left[x_{1,}x_0,x_m\right]$$
$$f[x_0,x_1,x_m]=\frac{f[x_1x_m]-f[x_0,x_1]}{x_m-x_1}$$
$$\therefore f[x_0,x_m]=f[x_0,x_1]+[x_m-x_1]f[x_0,x_1,x_m]$$

بالتعويض

$$f(x_m)=f(x_0)+(x_m-x_0)f[x_0,x_1]+(x_m-x_0)(x_m-x_1)f[x_0,x_1,x_m]$$
$$=f(x_0)+(x_m-x_0)\Delta y_0+(x_m-x_0)(x_m-x_1)f[x_0,x_1,x_m]$$

بنفس الأسلوب:

$$f(x_m)=y_0+(x_m-x_0)\Delta y_0+(x_m-x_0)(x_m-x_1)\Delta^2 y_0+(x_m-x_0)(x_m-x_1)(x_m-x_2)\Delta^3 y_0$$

بصورة عامة:-

$$y_m=y_0+(x_m-x_0)\Delta y_0+(x_m-x_0)(x_m-x_1)\Delta^2 y_0+(x_m-x_0)(x_m-x_1)(x_m-x_2)\Delta^3 y_0+..$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة الفروقات النسبية.

مثال:– البيلنات الآتية تمثل قيمة متعددة حدود: $f(x) = x^3 - 2x + 1$ عند النقاط $x=-2,1,3,4,6$

x	–2	1	3	4	6
f(x)	–3	0	22	57	205

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
–2	–3				
		1			
1	0				
			10/5=2		
		11			
3	22				
				1	
			8		
		35			0
4	57				
				1	
			13		
		74			
6	205				

مثال:– باستخدام صيغة الفروقات النسبية جد تخمين لقيمة $f(2)$ في جدول البيانات الأتي:

x	0	1	4	6
f(x)	–10	20	14	30

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	–10			
		30		
1	20		–8	
		–2		
				10/6
4	14		2	

6	30	8		

بتعويض $x=2$ في صيغة نيوتن

$$f(x_m) = y_0 + (x_m - x_0)\Delta!\, y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\Delta!^2\, y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)\Delta!^3\, y_0 + \ldots..$$

نحصل على:

$$f(2) = y_0 + (2 - x_0)\Delta y_0 + (2 - x_0)(2 - x_1)\Delta^2 y_0 + (2 - x_0)(2 - x_1)(2 - x_2)\Delta^3 y_0$$

ولدينا

$$y_0 = -10, \Delta y_0 = 30, \Delta^2 y_0 = -8, \Delta^3 y_0 = 10/6$$

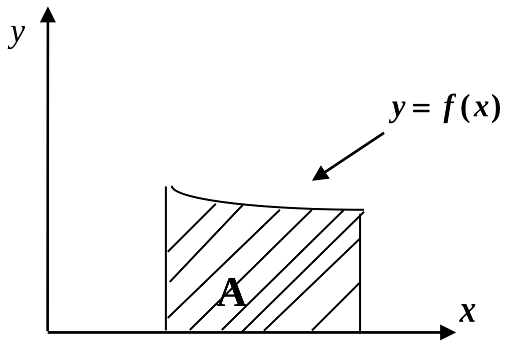
وبذلك فان

$$f(2) = -10 + (2)(30) + (2)(1)(-8) + (2)(1)(-2)(5/3) = 27.333$$

الفصل الخامس

التكامل العددي Numerical Integration

من التطبيقات الشائعة للطرق العددية هو استعمالها في حساب التكامل المحدد أو ما يعبر عن المساحة تحت المنحنيات:



أي أن :

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

يتم اللجوء إلى التكامل العددي عندما تكون هناك صعوبة وأحيانا استحالة في إيجاد قيمة التكامل للدالة بالطرق التحليلية المعتادة على سبيل المثال:

$$\int e^{x^2}dx,\int \sqrt{\sin x}\,dx,\int \frac{1}{2+\cos x}dx$$

أو عندما يكون التكلمل معرف بمجموعة قيم يشكل جدول مثل جدول قراءات مختبريه لتجربة معينة وكما هو الحال في الجدول الأتي لبيان سرعة جسم ساقط مع الزمن:

السرعة	الزمن
2.443	0.1
3.446	0.2
4.004	0.3
.	.
.	.
10.230	1.0
12.006	1.2

فعند حساب المسافة المقطوعة من قبل الجسم يجب حساب تكامل السرعة مع الزمن هكذا:

$$i.ev=\frac{ds}{dt}ors=\int vdt$$

وهنا نجد أن السرعة معرفة في الجدول أعلاه.

ومن أهم طرق التكامل التي يمكن التطرق إليها هي:

أ) طريقة شبه المنحرف Trapezium method

نستعمل أولا صيغة نيوتن التقدمية للاندراج ونكاملها على الفترة $[x_0, x_1]$ (الفترة $[0,1]$بالنسبة إلى t) فنحصل على

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

$$= h\int_0^1 \left[f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]$$

$$= h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2)\Delta^2 f_0 + (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2)\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]$$

أي أن:-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

في المتسلسلة اللامنتهية (1) إذا أهملت الحدود في الفروقات الثانية وما بعدها نحصل على الصيغة:-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وهي صيغة شبه المنحرف للتكامل العددي. حيث وكما هو واضح فان الدالة $f(x)$ تقترب إلى الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)))$ فتكون قيمة التكامل مساوية إلى مساحة شبه المنحرف المتكون بعد التقريب. إن خطا البتر في الصيغة (2) يساوي

$$T = \frac{-h}{12}\Delta^2 f_0 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{-h^3}{12} f''(\theta).\ \theta \varepsilon (x_0, x_1)$$

واعتماده على المشتقة للدالة f يعني أن طريقة شبه المنحرف تعطي نتيجة خالية من خطا البتر عندما تكون الدالة f عبارة عن متعددة حدود بدرجة 1 أو اقل.

عند تعميم الصيغة (2) على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ نحصل على:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبذلك يصبح

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \sum_{i-1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

أي أن

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{f_0} + \boldsymbol{2}(\boldsymbol{f_1}+\ldots\ldots+\boldsymbol{f_{n-1}}) + \boldsymbol{f_n}]\ldots\ldots\ldots\ldots(\boldsymbol{3})$$

والتي تسمى بطريقة شبه المنحرف المركبة.

خوارزمية شبه المنحرف

1. ادخل قيمة a,b وكذلك $f(x)$ المراد تكاملها.
2. ادخل قيمة n كلما كانت كبيرة كلما كان الناتج قريب للقيمة الحقيقية.
3. احسب قيمة h لقيم a,b : $h = \frac{b-a}{n}$.
4. $i = 0,1,\ldots\ldots,n-1, x_i = a + ih$.
5. احسب $I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$.

ابدأ

↓

اقرأ: a,b,n

↓

$H=(b-a)/2$

↓

$x_i = a + ih, i = 0,\ldots\ldots,n-1$

↓

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

↓

أطبع قيمة I

↓

نهاية

أمثلة:-

1. حل التكامل التالي عدديا $I=\int_0^4 e^x dx$ إذا علمت أن $n=4$.

الحل:

$$f(x)=e^x, f(a)=f(0)=e^0=1, f(b)=f(4)=e^4=54.598$$
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$
$$x_{i+1}=x_i+h \text{ or } x_{i+1}=x_0+ih$$
$$x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=e^0=1$$
$$x_1=x_0+h=0+1=1 \Rightarrow f(x_1)=f(1)=e^1=2.71828$$
$$x_2=x_1+h=1+1=2 \Rightarrow f(x_2)=f(2)=e^2=7.38906$$
$$x_3=x_2+h=2+1=3 \Rightarrow f(x_3)=f(3)=e^3=20.08554$$
$$x_4=x_3+h=3+1=4 \Rightarrow f(x_4)=f(4)=e^4=54.59815$$
$$I=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$
$$I=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))]$$
$$I=\frac{h}{2}[1+e^4+2(e^1+e^2+e^3)]$$
$$I=\frac{1}{2}[1+54.59815+2(2.71828+7.38906+20.08554)]$$
$$I=57.99187$$

2. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف $\int_0^5 \sin d\,x$ إذا كانت n=5 .

الحل:

$$\mathbf{h=\frac{5-0}{5}=1\ ,\ x_0=0}$$
$$\mathbf{x_1=x_0+h=0+1=1 \Rightarrow f(x_1)=f(1)=\sin 1=0.8414}$$
$$\mathbf{x_2=x_1+h=1+1=2 \Rightarrow f(x_2)=f(2)=\sin 2=0.9092}$$
$$\mathbf{x_3=x_2+h=2+1=3 \Rightarrow f(x_3)=f(3)=\sin 3=0.1411}$$
$$\boldsymbol{x_4=x_3+h=3+1=4 \Rightarrow f(x_4)=f(4)=\sin 4=-0.7568}$$
$$\boldsymbol{x_5=x_4+h=4+1=5 \Rightarrow f(x_5)=f(5)=\sin 5=-0.9589}$$
$$\boldsymbol{I=\frac{1}{2}[0+(\sin 5)+2(\sin 1+\sin 2+\sin 3+\sin 4)]}$$
$$\boldsymbol{I=\frac{1}{2}[0+(-0.9589)+2(0.8414+0.9092+0.1411+(-0.7568))]}$$

$$I = \frac{1}{2}[-0.9589 + 1.6828 + 1.8184 + 0.288 - 1.5136] = \frac{1}{2}[1.3167]$$
$$I = 0.65835$$

3. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف من الجدول التالي

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x)	1	1.56	2.25	3.06	4

الحل:

من الجدول عدد النقاط n=4 مقدار الزيادة h=0.25 a=1,b=2

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$
$$I = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))]$$
$$= \frac{h}{2}[1 + 4 + 2(1.56 + 2.25 + 3.06)] = 2.3437$$

4. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف $\int_0^4 (2 - x^2)\,dx$ إذا كانت n=8 .

ب) طريقة سمبسون Simpson's method

نستعمل هنا صيغة نيوتن التقدمية ونكاملها على الفترة $[x_0, x_2]$ (الفترة $[0,2]$ بالنسبة إلى t) فنحصل على:-

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$$
$$= h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2)\Delta^2 f_0 + (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2)\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]_0^2$$
$$= h\left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 + 0.\Delta^3 f_0 - \frac{1}{90}\Delta^4 f_0 + \ldots\ldots\right]$$

وعند بتر هذه المتسلسلة بعد الحد في الفروقات الثالثة تنتج العلاقة:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وهذه صيغة سمبسون للتكامل العددي وخطا البتر فيها يساوي:

$$T = -\frac{1}{90}h\Delta^4 f_0 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{-h^5}{90} f^4(\theta). \theta\varepsilon(x_0, x_2)$$

أي أن خطا البتر المحلي من الرتبة $\theta(h^5)$ وان الصيغة (4) تعطي قيمة مضبوطة للتكامل عندما تكون الدالة f متعددة حدود من الدرجة الثالثة فما دون.يمكن كتابة صيغة سمبسون المركبة وذلك بتطبيق الصيغة (4)على كل جزء من المدى متكون من فترتين جزئيتين$[x_i, x_{i+2}]$ فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots\ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

من الواضح أن n يجب أن يكون عددا زوجيا لأجل تطبيق طريقة سمبسون.في الحالات التي يكون فيها n فرديا يمكن استخدام طريقة شبه المنحرف على الفترة $[x_0, x_1]$ ثم طريقة سمبسون على الفترات الباقية من المدى.

خوارزمية طريقة سمبسون:

1. ادخل قيمة a,b وكذلك$f(x)$ المراد تكاملها.
2. ادخل قيمة n.**(يجب ان تكوم قيمة n زوجية)**
3. $h = \frac{b-a}{n}$ لقيم الفترة a,b .
4. $i = 0,1,\ldots\ldots,n-1, x_i = a + ih$.
5. $I = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})\right]$.

أمثلة:-

1. **حل التكامل العددي التالي $\int_0^4 e^x dx$ بطريقة سمبسون إذا علمت أن$h = (4-0)/8$.**

الحل:

$$h = \frac{1}{2}, n = 8, a = 0, b = 4$$
$$f(a) = f(0) = e^0 = 1, f(b) = f(4) = e^4 = 54.598$$
$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5 \Rightarrow f(x_1) = f(0.5) = e^{0.5} = 1.64872$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1 \Rightarrow f(x_2) = f(1) = e^1 = 2.71828$$
$$x_3 = x_2 + h = 1 + 0.5 = 1.5 \Rightarrow f(x_3) = f(1.5) = e^{1.5} = 4.48168$$
$$x_4 = x_3 + h = 1.5 + 0.5 = 2 \Rightarrow f(x_4) = f(2) = e^2 = 7.38905$$
$$x_5 = x_4 + h = 2 + 0.5 = 2.5 \Rightarrow f(x_5) = f(2.5) = e^{2.5} = 12.18249$$
$$x_6 = x_5 + h = 2.5 + 0.5 = 3 \Rightarrow f(x_6) = f(3) = e^3 = 20.08553$$
$$x_7 = x_6 + h = 3 + 0.5 = 3.5 \Rightarrow f(x_7) = f(3.5) = e^{3.5} = 33.11545$$
$$I = \frac{0.5}{3}[55.59815] + \frac{1}{3}[30.19286] + \frac{2}{3}[51.42834]$$
$$I = 160.848615/3 = 53.616205$$

2. حـل التكـامـل العـددي التـالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ بطريقـة سـمبسـون إذا علمـت أن:

$$\boldsymbol{n = 6, a = 0, b = 1, h = (b-a)/n = (1-0)/6 = 1/6}$$

الحل:

$$x_i = a + ih$$
$$x_0 = a + 0h = a + 0 = a \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 0$$
$$x_1 = a + h = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{6})^2} = 0.97302$$
$$x_2 = a + 2h = 0 + 2(\frac{1}{6}) = \frac{2}{6} \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{3})^2} = 0.9$$
$$x_3 = a + 3h = 0 + 3(\frac{1}{6}) = \frac{3}{6} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} = 0.8$$
$$x_4 = a + 4h = 0 + 4(\frac{1}{6}) = \frac{4}{6} \Rightarrow f(x_4) = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{1 + (\frac{2}{3})^2} = 0.69230$$
$$x_5 = a + 5h = 0 + 5(\frac{1}{6}) = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = f(\frac{5}{6}) = \frac{1}{1 + (\frac{5}{6})^2} = 0.5901639$$
$$x_6 = a + 6h = 0 + 6(\frac{1}{6}) = \frac{6}{6} = 1 = b \Rightarrow f(x_6) = f(1) = \frac{1}{1 + (1)^2} = 0.5$$
$$I = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})\right]$$

$$I = \frac{1/6}{3}[f(a) + f(b) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4))]$$

$$I = \frac{1}{18}\left[1 + \frac{1}{2} + 4(0.97 + 0.8 + 0.59) + 2(0.9 + 0.69)\right]$$

$$I = \frac{1}{18}\left[1 + \frac{1}{2} + 9.44 + 3.18\right] = \frac{1}{18}(14.12) = 0.784444$$

طرق أخرى

ج) طريقة سمبسون3/8

بنفس الأسلوب يمكن الحصول على صيغ رياضية أخرى للتكامل .فمثلا نكامل صيغة نيوتن على الفترة $[x_0, x_3]$ فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{8}h[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

والتي تسمى صيغة الثلاث أثمان للتكامل والتي تتضمن أربع نقاط أي أربع قيم للدالة وخطا البتر فيها من الرتبة $\theta(h^5)$ كما يمطن تطبيقها عندما يكون عدد الفترات الجزئية n قابلا للقسمة على 3.

مثال:ـ

$$I = \int_0^1 x^4 dx$$

الحل:

$$\Rightarrow \left.\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}, n = 6, h = \frac{a-b}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$I = \frac{3}{8}h\left[f_a + 3\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f_b\right]$$

$$x_i = a + iha = 0$$

$$x_0 = a + 0h = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^4 = 0$$

$$x_1 = 0 + 1h = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{6}) = (\frac{1}{6})^4 = 0.00077$$

$$x_2 = 0 + 2h = \frac{2}{6} \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{2}{6}) = (\frac{2}{6})^4 = 0.01234$$

$$x_3 = 0 + 3h = \frac{3}{6} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{3}{6}) = (\frac{3}{6})^4 = 0.06251$$

$$x_4 = 0 + 4h = \frac{4}{6} \Rightarrow f(x_4) = f(\frac{4}{6}) = (\frac{4}{6})^4 = 0.1975$$

$$x_5 = 0 + 5h = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = f(\frac{5}{6}) = (\frac{5}{6})^4 = 0.482253$$

$$x_6 = 0 + 6h = \frac{6}{6} \Rightarrow f(x_6) = f(\frac{6}{6}) = (\frac{6}{6})^4 = 1$$

$$I = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)]$$

$I = 0.2002243$

إن رتبة خطا البتر متساوية في كلا من صيغتي سمبسون والصيغة (6) ولكن المعامل في الاولى اقل وهذا ما يجعل طريقة سمبسون من الطرق المرغوبة في التكامل العددي

د) طريقة بول:

.إن صيغة بول تتضمن خمسة نقاط:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4] \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

مثال(1):-

$$I = \int_0^1 x^4 dx$$

الحل:

$$I = \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{5}, n = 6, h = \frac{a-b}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = 0.00077, f(x_2) = 0.01234, f(x_3) = 0.06251$$

$$f(x_4) = 0.1975, f(x_5) = 0.482253, f(x_6) = 1$$

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 12f(x_4) + 32f(x_5) + 7f(x_6)]$$

$$= \frac{2}{45} \times \frac{1}{6}[7(0) + 32(0.00077) + 12(0.01234) + 32(0.06251)$$

$$+12(0.1975) + 32(0.482233) + 7(1)]$$

$$= \frac{1}{135}(0 + 0.02464 + 0.1481 + 2.00032 + 2.37 + 15.432069 + 7)$$

$$= 0.147963979$$

مثال(1):-

$$I=\int_0^1 x^2dx$$

الحل:

$$I=\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{1}{3},n=6,h=\frac{a-b}{n}=\frac{1-0}{6}=\frac{1}{6},a=0$$

$$x_i=a+ih$$

$$x_0=a+ih=0+0h=0\Rightarrow f(x_0)=0$$

$$x_1=a+ih=0+1h=\frac{1}{6}\Rightarrow f(x_1)=f(\frac{1}{6})=(\frac{1}{6})^2=0.027$$

$$x_2=a+ih=0+2h=\frac{2}{6}\Rightarrow f(x_2)=f(\frac{2}{6})=(\frac{2}{6})^2=0.111$$

$$x_3=a+ih=0+3h=\frac{3}{6}\Rightarrow f(x_3)=f(\frac{3}{6})=(\frac{3}{6})^2=0.250$$

$$x_4=a+ih=0+4h=\frac{4}{6}\Rightarrow f(x_4)=f(\frac{4}{6})=(\frac{4}{6})^2=0.444$$

$$x_5=a+ih=0+5h=\frac{5}{6}\Rightarrow f(x_5)=f(\frac{5}{6})=(\frac{5}{6})^2=0.694$$

$$x_6=a+ih=0+6h=\frac{6}{6}\Rightarrow f(x_6)=f(\frac{6}{6})=(\frac{6}{6})^2=1$$

$$\int_{x_0}^{x_6}f(x)dx$$

$$=\frac{2h}{45}[f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+12f(x_4)+32f(x_5)+7f(x_6)]$$

$$=\frac{2}{45}\times\frac{1}{6}[7(0)+32(0.027)+12(0.111)+32(0.250)+12(0.444)+32(0.694)+7(1)]$$

$$=\frac{1}{135}(0+0.864+1.332+8+5.328+22.208+7)$$

$$=\frac{2}{270}[44.732]=0.331$$

مثال(2):-

$$I=\int_1^2 xdx$$

الحل:

$$I=\frac{x^2}{2}\bigg]_1^2=2-\frac{1}{2}=1.5, n=6, h=\frac{a-b}{n}=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}, a=1$$

$$x_i=a+ih \Rightarrow x_0=a=1 \Rightarrow f(x_0)=1$$
$$x_1=1+1/6=1.166 \Rightarrow f(x_1)=1.166$$
$$x_2=1+2/6=1.333 \Rightarrow f(x_2)=1.333$$
$$x_3=1+3/6=1.5 \Rightarrow f(x_3)=1.5$$
$$x_4=1+4/6=1.666 \Rightarrow f(x_4)=1.666$$
$$x_5=1+5/6=1.833 \Rightarrow f(x_5)=1.833$$
$$x_6=1+6/6=2 \Rightarrow f(x_6)=2$$

$$\int_{x_0}^{x_6} xdx=\frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+12f(x_4)$$
$$+32f(x_5)+7f(x_6)]$$
$$=\frac{2}{45}*\frac{1}{6}[7(1)+32(1.166)+12(1.333)+32(1.5)$$
$$+12(1.666)+32(1.833)+7(2)]$$
$$=\frac{1}{135}(7+37.312+15.996+48+19.9992+58.656+14)$$
$$=\frac{1}{135}[200.956]=1.488$$

هـــ)صيغة ويدل (Weddle's formula)ذات السبع نقاط:

$$\int f(x)dx = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6] \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

اي ان n=6 دائما

مثال(1):-

$$\int_0^6 2xdx$$

الحل:

$$I = x^2]_0^6 = 36, n = 6, a = 0, b = 6, h = \frac{a-b}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$$

$$x_i = a + ih \Rightarrow x_0 = a + 0h = a = 0 \Rightarrow f(x_0) = 2(0) = 0$$

$$x_1 = a + 1h = a + 1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 2(1) = 2$$

$$x_2 = a + 2h = a + 2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 2(2) = 4$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow f(x_3) = 2(3) = 6$$

$$x_4 = 4 \Rightarrow f(x_4) = 2(4) = 8$$

$$x_5 = 5 \Rightarrow f(x_5) = 2(5) = 10$$

$$x_6 = 6 \Rightarrow f(x_6) = 2(6) = 12$$

$$\int_0^6 2xdx = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6]$$

$$= \frac{3}{10}(0 + 5(2) + 4 + 6(6) + 8 + 5(10) + 12)$$

$$= \frac{3}{10}(0 + 10 + 4 + 36 + 8 + 50 + 12)$$

$$= \frac{360}{10} = 36$$

مثال(2):-

$$\int_0^1 x dx$$

الحل:

$$I = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}, n = 6, a = 0, b = 6, h = \frac{1}{6}$$

$$x_i = a + ih \Rightarrow x_0 = a + 0h = a = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 0 + 1h = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 0 + 2h = \frac{2}{6} \Rightarrow f(x_2) = 2/6$$

$$x_3 = \frac{3}{6} \Rightarrow f(x_2) = 3/6$$

$$x_4 = \frac{4}{6} \Rightarrow f(x_4) = 4/6$$

$$x_5 = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = 5/6$$

$$x_6 = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow f(x_6) = 1$$

$$I = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6]$$

$$= \frac{3(1/6)}{10}\left[0 + 5(\frac{1}{6}) + \frac{2}{6} + 6(\frac{3}{6}) + \frac{4}{6} + 5(\frac{5}{6}) + \frac{6}{6}\right]$$

$$= \frac{\frac{3}{6}}{10}\left[\frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{18}{6} + \frac{4}{6} + \frac{25}{6} + \frac{6}{6}\right]$$

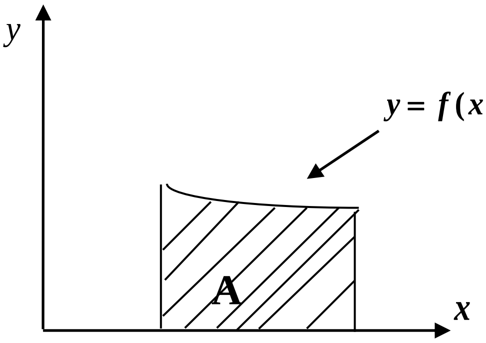
$$= \frac{1}{20}\left[\frac{5 + 2 + 18 + 4 + 25 + 6}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{60}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

الفصل الخامس

التكامل العددي Numerical Integration

من التطبيقات الشائعة للطرق العددية هو استعمالها في حساب التكامل المحدد أو ما يعبر عن المساحة تحت المنحنيات:



أي أن :

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

يتم اللجوء إلى التكامل العددي عندما تكون هناك صعوبة وأحيانا استحالة في إيجاد قيمة التكامل للدالة بالطرق التحليلية المعتادة على سبيل المثال:

$$\int e^{x^2}dx, \int \sqrt{\sin x}\, dx, \int \frac{1}{2+\cos x} dx$$

أو عندما يكون التكلمل معرف بمجموعة قيم يشكل جدول مثل جدول قراءات مختبريه لتجربة معينة وكما هو الحال في الجدول الأتي لبيان سرعة جسم ساقط مع الزمن:

السرعة	الزمن
2.443	0.1
3.446	0.2
4.004	0.3
.	.
.	.
10.230	1.0
12.006	1.2

فعند حساب المسافة المقطوعة من قبل الجسم يجب حساب تكامل السرعة مع الزمن هكذا:

$$i.ev = \frac{ds}{dt} ors = \int vdt$$

وهنا نجد أن السرعة معرفة في الجدول أعلاه.

إعداد:
أ.يونس حازم أ.صهيب عبد الجبار

ومن أهم طرق التكامل التي يمكن التطرق إليها هي:

أ) طريقة شبه المنحرف **Trapezium method**

نستعمل أولا صيغة نيوتن التقدمية للاندراج ونكاملها على الفترة $[x_0, x_1]$ (الفترة $[0,1]$بالنسبة إلى t) فنحصل على

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

$$= h\int_0^1 \left[f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]$$

$$= h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2)\Delta^2 f_0 + (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2)\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]$$

أي أن:-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

في المتسلسلة اللامنتهية (1) إذا أهملت الحدود في الفروقات الثانية وما بعدها نحصل على الصيغة:-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وهي صيغة شبه المنحرف للتكامل العددي. حيث وكما هو واضح فان الدالة $f(x)$ تقترب إلى الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ فتكون قيمة التكامل مساوية إلى مساحة شبه المنحرف المتكون بعد التقريب. إن خطا البتر في الصيغة (2) يساوي

$$T = \frac{-h}{12}\Delta^2 f_0 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{-h^3}{12} f''(\theta).\ \theta\varepsilon(x_0, x_1)$$

واعتماده على المشتقة للدالة f يعني أن طريقة شبه المنحرف تعطي نتيجة خالية من خطا البتر عندما تكون الدالة f عبارة عن متعددة حدود بدرجة 1 أو اقل.

عند تعميم الصيغة (2) على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ نحصل على:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبذلك يصبح

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \sum_{i-1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

أي أن

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{f_0} + \boldsymbol{2}(\boldsymbol{f_1} + \ldots\ldots + \boldsymbol{f_{n-1}}) + \boldsymbol{f_n}]\ldots\ldots\ldots\ldots(\boldsymbol{3})$$

والتي تسمى بطريقة شبه المنحرف المركبة.

خوارزمية شبه المنحرف

6. ادخل قيمة a,b وكذلك $f(x)$ المراد تكاملها.
7. ادخل قيمة n كلما كانت كبيرة كلما كان الناتج قريب للقيمة الحقيقية.
8. احسب قيمة h لقيم a,b : $h = \frac{b-a}{n}$.
9. $i = 0,1,\ldots\ldots,n-1, x_i = a + ih$.
10. احسب $I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$.

ابدأ

↓

اقرأ: a,b,n

↓

$H=(b-a)/2$

↓

$x_i = a + ih, i = 0,\ldots\ldots,n-1$

↓

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$\downarrow$

أطبع قيمة I

$\downarrow$

نهاية

أمثلة:-

5. حل التكامل التالي عدديا $I=\int_0^4 e^x dx$ إذا علمت أن n=4 .

الحل:

$$f(x)=e^x, f(a)=f(0)=e^0=1, f(b)=f(4)=e^4=54.598$$
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$
$$x_{i+1}=x_i+h \ or \ x_{i+1}=x_0+ih$$
$$x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=e^0=1$$
$$x_1=x_0+h=0+1=1 \Rightarrow f(x_1)=f(1)=e^1=2.71828$$
$$x_2=x_1+h=1+1=2 \Rightarrow f(x_2)=f(2)=e^2=7.38906$$
$$x_3=x_2+h=2+1=3 \Rightarrow f(x_3)=f(3)=e^3=20.08554$$
$$x_4=x_3+h=3+1=4 \Rightarrow f(x_4)=f(4)=e^4=54.59815$$
$$I=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$
$$I=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))]$$
$$I=\frac{h}{2}[1+e^4+2(e^1+e^2+e^3)]$$
$$I=\frac{1}{2}[1+54.59815+2(2.71828+7.38906+20.08554)]$$
$$I=57.99187$$

6. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف $\int_0^5 sin\, d\, x$ إذا كانت n=5 .

الحل:

$$\mathbf{h=\frac{5-0}{5}=1\ ,\ x_0=0}$$
$$\mathbf{x_1=x_0+h=0+1=1 \Rightarrow f(x_1)=f(1)=\sin 1=0.8414}$$
$$\mathbf{x_2=x_1+h=1+1=2 \Rightarrow f(x_2)=f(2)=\sin 2=0.9092}$$
$$\mathbf{x_3=x_2+h=2+1=3 \Rightarrow f(x_3)=f(3)=\sin 3=0.1411}$$
$$\boldsymbol{x_4=x_3+h=3+1=4 \Rightarrow f(x_4)=f(4)=sin\,4=-0.7568}$$
$$\boldsymbol{x_5=x_4+h=4+1=5 \Rightarrow f(x_5)=f(5)=sin\,5=-0.9589}$$
$$\boldsymbol{I=\frac{1}{2}[0+(sin\,5)+2(sin\,1+sin\,2+sin\,3+sin\,4)]}$$
$$\boldsymbol{I=\frac{1}{2}[0+(-0.9589)+2(0.8414+0.9092+0.1411+(-0.7568))]}$$

$$I = \frac{1}{2}[-0.9589 + 1.6828 + 1.8184 + 0.288 - 1.5136] = \frac{1}{2}[1.3167]$$
$$I = 0.65835$$

7. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف من الجدول التالي

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x)	1	1.56	2.25	3.06	4

الحل:

من الجدول عدد النقاط n=4 مقدار الزيادة h=0.25 a=1,b=2

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$
$$I = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))]$$
$$= \frac{h}{2}[1 + 4 + 2(1.56 + 2.25 + 3.06)] = 2.3437$$

8. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف $\int_0^4 (2 - x^2)\, d\, x$ إذا كانت n=8 .

ب) طريقة سمبسون Simpson's method

نســتعمل هنا صــيغة نيوتن التقدمية ونكاملها على الفترة $[x_0, x_2]$ (الفترة [0,2]بالنســبة إلى t)فنحصل على:-

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$$
$$= h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2)\Delta^2 f_0 + (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2)\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots\right]_0^2$$
$$= h\left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 + 0.\Delta^3 f_0 - \frac{1}{90}\Delta^4 f_0 + \ldots\ldots\right]$$

وعند بتر هذه المتسلسلة بعد الحد في الفروقات الثالثة تنتج العلاقة:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

وهذه صيغة سمبسون للتكامل العددي وخطا البتر فيها يساوي:

$$T = -\frac{1}{90}h\Delta^4 f_0 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{-h^5}{90} f^4(\theta). \theta\varepsilon(x_0, x_2)$$

أي أن خطا البتر المحلي من الرتبة $\theta(h^5)$ وان الصيغة (4) تعطي قيمة مضبوطة للتكامل عندما تكون الدالة f متعددة حدود من الدرجة الثالثة فما دون.يمكن كتابة صيغة سمبسون المركبة وذلك بتطبيق الصيغة (4)على كل جزء من المدى متكون من فترتين جزئيتين$[x_i, x_{i+2}]$ فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots\ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

من الواضـح أن n يجب أن يكون عددا زوجيا لأجل تطبيق طريقة سـمبسـون.في الحـالات التي يكون فيها n فرديا يمكن استخدام طريقة شبه المنحرف على الفترة $[x_0, x_1]$ ثم طريقة سمبسون على الفترات الباقية من المدى.

خوارزمية طريقة سمبسون:

1. ادخل قيمة a,b وكذلك$f(x)$ المراد تكاملها.
2. ادخل قيمة n.**(يجب ان تكوم قيمة n زوجية)**
3. $h = \frac{b-a}{n}$ لقيم الفترة a,b .
4. $x_i = a + ih$, $i = 0,1, \ldots\ldots, n-1$.
5. $I = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})\right]$.

أمثلة:-

3. حل التكامل العددي التالي $\int_0^4 e^x dx$ بطريقة سمبسون إذا علمت أن$h = (4-0)/8$.

الحل:

$$h = \frac{1}{2}, n = 8, a = 0, b = 4$$
$$f(a) = f(0) = e^0 = 1, f(b) = f(4) = e^4 = 54.598$$
$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5 \Rightarrow f(x_1) = f(0.5) = e^{0.5} = 1.64872$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1 \Rightarrow f(x_2) = f(1) = e^1 = 2.71828$$
$$x_3 = x_2 + h = 1 + 0.5 = 1.5 \Rightarrow f(x_3) = f(1.5) = e^{1.5} = 4.48168$$
$$x_4 = x_3 + h = 1.5 + 0.5 = 2 \Rightarrow f(x_4) = f(2) = e^2 = 7.38905$$
$$x_5 = x_4 + h = 2 + 0.5 = 2.5 \Rightarrow f(x_5) = f(2.5) = e^{2.5} = 12.18249$$
$$x_6 = x_5 + h = 2.5 + 0.5 = 3 \Rightarrow f(x_6) = f(3) = e^3 = 20.08553$$
$$x_7 = x_6 + h = 3 + 0.5 = 3.5 \Rightarrow f(x_7) = f(3.5) = e^{3.5} = 33.11545$$
$$I = \frac{0.5}{3}[55.59815] + \frac{1}{3}[30.19286] + \frac{2}{3}[51.42834]$$
$$I = 160.848615/3 = 53.616205$$

4. حـل التكـامـل العـددي التـالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ بطريقـة ســـمبســـون إذا علمـت أن:
$$\boldsymbol{n = 6, a = 0, b = 1, h = (b-a)/n = (1-0)/6 = 1/6}$$

الحل:

$$x_i = a + ih$$
$$x_0 = a + 0h = a + 0 = a \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 0$$
$$x_1 = a + h = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{1+(\frac{1}{6})^2} = 0.97302$$
$$x_2 = a + 2h = 0 + 2(\frac{1}{6}) = \frac{2}{6} \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2} = 0.9$$
$$x_3 = a + 3h = 0 + 3(\frac{1}{6}) = \frac{3}{6} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} = 0.8$$
$$x_4 = a + 4h = 0 + 4(\frac{1}{6}) = \frac{4}{6} \Rightarrow f(x_4) = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{1+(\frac{2}{3})^2} = 0.69230$$
$$x_5 = a + 5h = 0 + 5(\frac{1}{6}) = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = f(\frac{5}{6}) = \frac{1}{1+(\frac{5}{6})^2} = 0.5901639$$
$$x_6 = a + 6h = 0 + 6(\frac{1}{6}) = \frac{6}{6} = 1 = b \Rightarrow f(x_6) = f(1) = \frac{1}{1+(1)^2} = 0.5$$
$$I = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})\right]$$

$$I=\frac{1/6}{3}\left[f(a)+f(b)+4(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5))+2(f(x_2)+f(x_4))\right]$$

$$I=\frac{1}{18}\left[1+\frac{1}{2}+4(0.97+0.8+0.59)+2(0.9+0.69)\right]$$

$$I=\frac{1}{18}\left[1+\frac{1}{2}+9.44+3.18\right]=\frac{1}{18}(14.12)=0.784444$$

طرق أخرى

ج) طريقة سمبسون3/8

بنفس الأسلوب يمكن الحصول على صيغ رياضية أخرى للتكامل .فمثلا نكامل صيغة نيوتن على الفترة $[x_0, x_3]$ فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{8}h[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

والتي تسمى صيغة الثلاث أثمان للتكامل والتي تتضمن أربع نقاط أي أربع قيم للدالة وخطا البتر فيها من الرتبة $\theta(h^5)$ كما يمطن تطبيقها عندما يكون عدد الفترات الجزئية n قابلا للقسمة على 3.

مثال:-

$$I = \int_0^1 x^4 dx$$

الحل:

$$\Rightarrow \frac{x^5}{5}\bigg]_0^1 = \frac{1}{5}, n = 6, h = \frac{a-b}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$I = \frac{3}{8}h\left[f_a + 3\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f_b\right]$$

$$x_i = a + iha = 0$$

$$x_0 = a + 0h = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^4 = 0$$

$$x_1 = 0 + 1h = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{6}) = (\frac{1}{6})^4 = 0.00077$$

$$x_2 = 0 + 2h = \frac{2}{6} \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{2}{6}) = (\frac{2}{6})^4 = 0.01234$$

$$x_3 = 0 + 3h = \frac{3}{6} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{3}{6}) = (\frac{3}{6})^4 = 0.06251$$

$$x_4 = 0 + 4h = \frac{4}{6} \Rightarrow f(x_4) = f(\frac{4}{6}) = (\frac{4}{6})^4 = 0.1975$$

$$x_5 = 0 + 5h = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = f(\frac{5}{6}) = (\frac{5}{6})^4 = 0.482253$$

$$x_6 = 0 + 6h = \frac{6}{6} \Rightarrow f(x_6) = f(\frac{6}{6}) = (\frac{6}{6})^4 = 1$$

$$I = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)]$$

$I = 0.2002243$

إن رتبة خطا البتر متساوية في كلا من صيغتي سمبسون والصيغة (6) ولكن المعامل في الاولى اقل وهذا ما يجعل طريقة سمبسون من الطرق المرغوبة في التكامل العددي

د) طريقة بول:

إن صيغة بول تتضمن خمسة نقاط:.

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

مثال(1):-

$$I = \int_0^1 x^4 dx$$

الحل:

$$I = \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{5}, n = 6, h = \frac{a-b}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = 0.00077, f(x_2) = 0.01234, f(x_3) = 0.06251$$

$$f(x_4) = 0.1975, f(x_5) = 0.482253, f(x_6) = 1$$

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 12f(x_4) + 32f(x_5) + 7f(x_6)]$$

$$= \frac{2}{45} \times \frac{1}{6}[7(0) + 32(0.00077) + 12(0.01234) + 32(0.06251)$$

$$+12(0.1975) + 32(0.482233) + 7(1)]$$

$$= \frac{1}{135}(0 + 0.02464 + 0.1481 + 2.00032 + 2.37 + 15.432069 + 7)$$

$$= 0.147963979$$

مثال(1):-

$$I=\int_0^1 x^2dx$$

الحل:

$$I=\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{1}{3}, n=6, h=\frac{a-b}{n}=\frac{1-0}{6}=\frac{1}{6}, a=0$$

$$x_i=a+ih$$

$$x_0=a+ih=0+0h=0\Rightarrow f(x_0)=0$$

$$x_1=a+ih=0+1h=\frac{1}{6}\Rightarrow f(x_1)=f(\frac{1}{6})=(\frac{1}{6})^2=0.027$$

$$x_2=a+ih=0+2h=\frac{2}{6}\Rightarrow f(x_2)=f(\frac{2}{6})=(\frac{2}{6})^2=0.111$$

$$x_3=a+ih=0+3h=\frac{3}{6}\Rightarrow f(x_3)=f(\frac{3}{6})=(\frac{3}{6})^2=0.250$$

$$x_4=a+ih=0+4h=\frac{4}{6}\Rightarrow f(x_4)=f(\frac{4}{6})=(\frac{4}{6})^2=0.444$$

$$x_5=a+ih=0+5h=\frac{5}{6}\Rightarrow f(x_5)=f(\frac{5}{6})=(\frac{5}{6})^2=0.694$$

$$x_6=a+ih=0+6h=\frac{6}{6}\Rightarrow f(x_6)=f(\frac{6}{6})=(\frac{6}{6})^2=1$$

$$\int_{x_0}^{x_6}f(x)dx$$

$$=\frac{2h}{45}[f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+12f(x_4)+32f(x_5)+7f(x_6)]$$

$$=\frac{2}{45}\times\frac{1}{6}[7(0)+32(0.027)+12(0.111)+32(0.250)+12(0.444)+32(0.694)+7(1)]$$

$$=\frac{1}{135}(0+0.864+1.332+8+5.328+22.208+7)$$

$$=\frac{2}{270}[44.732]=0.331$$

مثال(2):-

$$I=\int_{1}^{2} xdx$$

الحل:

$$I=\frac{x^2}{2}\bigg]_1^2=2-\frac{1}{2}=1.5, n=6, h=\frac{a-b}{n}=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}, a=1$$

$$x_i=a+ih \Rightarrow x_0=a=1 \Rightarrow f(x_0)=1$$
$$x_1=1+1/6=1.166 \Rightarrow f(x_1)=1.166$$
$$x_2=1+2/6=1.333 \Rightarrow f(x_2)=1.333$$
$$x_3=1+3/6=1.5 \Rightarrow f(x_3)=1.5$$
$$x_4=1+4/6=1.666 \Rightarrow f(x_4)=1.666$$
$$x_5=1+5/6=1.833 \Rightarrow f(x_5)=1.833$$
$$x_6=1+6/6=2 \Rightarrow f(x_6)=2$$

$$\int_{x_0}^{x_6} xdx=\frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+12f(x_4) + 32f(x_5)+7f(x_6)]$$

$$=\frac{2}{45}*\frac{1}{6}[7(1)+32(1.166)+12(1.333)+32(1.5) +12(1.666)+32(1.833)+7(2)]$$

$$=\frac{1}{135}(7+37.312+15.996+48+19.9992+58.656+14)$$

$$=\frac{1}{135}[200.956]=1.488$$

هــ)صيغة ويدل (Weddle's formula)ذات السبع نقاط:

$$\int f(x)dx = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6] \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

اي ان n=6 دائما

مثال(1):–

$$\int_0^6 2xdx$$

الحل:

$$I = x^2]_0^6 = 36, n = 6, a = 0, b = 6, h = \frac{a-b}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$$

$$x_i = a + ih \Rightarrow x_0 = a + 0h = a = 0 \Rightarrow f(x_0) = 2(0) = 0$$
$$x_1 = a + 1h = a + 1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 2(1) = 2$$
$$x_2 = a + 2h = a + 2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 2(2) = 4$$
$$x_3 = 3 \Rightarrow f(x_3) = 2(3) = 6$$
$$x_4 = 4 \Rightarrow f(x_4) = 2(4) = 8$$
$$x_5 = 5 \Rightarrow f(x_5) = 2(5) = 10$$
$$x_6 = 6 \Rightarrow f(x_6) = 2(6) = 12$$

$$\int_0^6 2xdx = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6]$$
$$= \frac{3}{10}(0 + 5(2) + 4 + 6(6) + 8 + 5(10) + 12)$$
$$= \frac{3}{10}(0 + 10 + 4 + 36 + 8 + 50 + 12)$$
$$= \frac{360}{10} = 36$$

مثال(2):-

$$\int_0^1 x dx$$

الحل:

$$I = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}, n = 6, a = 0, b = 6, h = \frac{1}{6}$$

$$x_i = a + ih \Rightarrow x_0 = a + 0h = a = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 0 + 1h = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 0 + 2h = \frac{2}{6} \Rightarrow f(x_2) = 2/6$$

$$x_3 = \frac{3}{6} \Rightarrow f(x_2) = 3/6$$

$$x_4 = \frac{4}{6} \Rightarrow f(x_4) = 4/6$$

$$x_5 = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = 5/6$$

$$x_6 = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow f(x_6) = 1$$

$$I = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6]$$

$$= \frac{3(1/6)}{10}\left[0 + 5(\frac{1}{6}) + \frac{2}{6} + 6(\frac{3}{6}) + \frac{4}{6} + 5(\frac{5}{6}) + \frac{6}{6}\right]$$

$$= \frac{\frac{3}{6}}{10}\left[\frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{18}{6} + \frac{4}{6} + \frac{25}{6} + \frac{6}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[\frac{5 + 2 + 18 + 4 + 25 + 6}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{60}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

و) طريقة رومبرك

في طريقة التكامل العددي والحلول العددية للمعادلات التفاضلية والمسائل التي يقسم فيها المدى إلى عدد محدود من الفترات الجزئية المتساوية هناك طريقة لتحسين النتائج هي طريقة الاستكمال لريتشاردسون وهي طريقة تطبق على المسائل التي يمكن فيها كتابة مقدار الخطأ في النتيجة حيث:

$$E(h) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i\, h^i$$

حيث k يمثل اقل أس إلى h في المتسلسلة والمعاملات a_i هي كميات لا تعتمد على h.

نفرض وجود صيغتين للتكامل :

$$Y = y_1(h_1) + \sum_{i=k}^{\infty} a_i h^i$$

$$Y = y_2(h_2) + \sum_{i=k}^{\infty} a_i h^i$$

يمكن كتابة الحالتين أعلاه كما يلي:

$$Y = y_1(h_1) + \sum_{i=k}^{\infty} a_i h_1^i$$

$$Y = y_2(h_2) + \sum_{i=k}^{\infty} a_i h_2^i$$

إن طريقة رومبرك هي عبارة عن تطبيق لطريقة ريتشاردسون على مسالة إيجاد قيمة أفضل للتكامل $I = \int_a^b f(x)dx$عندما تكون قيم الدالة ومشتقاتها محدودة في الفترة $[a,b]$ فان قيمة التكامل المضبوط I والقيمة التقريبية $T(h)$ المحسوبة بطريقة شبه المنحرف وبطول فترة يساوي h يرتبطان بالعلاقة:

$$T(h) = I + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h^{2j}$$

$$T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + \ldots.. + 2f_{n-1} + f_n], n = 2^k$$

$$T(h) = T_{0,k} T(\frac{h}{2}) = T_{0,k+1}$$

$$T_{0,k} = I + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h^{2j}\ T_{0,k+1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (\frac{h}{2})^{2j}$$

$$\frac{4T_{0,k+1} - T_{0,k}}{3} = I + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j h^{2j}}{3} (\frac{4}{2^{2j}} - 1)$$

يمكن الحصول على كل هذه المتتاليات من التقريبات من الصيغة العامة الرياضية:

$$T_{m,k} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k})$$
$$k = 0,1,\dots\dots\dots\ m = 1,2,\dots\dots\dots\dots$$

يمكن توضيح الصيغة بالجدول:

	h^2	h^4	h^6	h^8
$\frac{h}{1}$	$T_{0,0}$			
$\frac{h}{2}$	$T_{0,1}$	$T_{1,0}$		
$\frac{h}{4}$	$T_{0,2}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$	
$\frac{h}{8}$	$T_{0,3}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{3,0}$

حيث أن الأعمدة المتعاقبة تتقارب أسرع إلى الحل المضبوط ، كما أن أفضل قيمة للتكامل في الجدول هي القيمة الموجودة في اوطا نقطة في أقصى اليمين من الجدول.

الخوارزمية

نحسبها أولا بطريقة شبه المنحرف أو بطريقة سمبسون $T_{0,0}, T_{0,1}, T_{0,2}, T_{0,3}$ ومن ثم حسابها بقانون رومبرك.

أمثلة:-

1- $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

احسب أولا بطريقة شبه المنحرف $T_{0,0}, T_{0,1}, T_{0,2}, T_{0,3}$.

الحل /

$$I=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\left[f_0+f_n+2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right], x_i=x_0+ih$$

أ) نأخذ $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{1}=1 \Leftarrow n=1$

$$x_0=0+0\times 1=0 \Rightarrow f(x_0)=f(0)=\frac{1}{1+0}=1$$

$$x_n=0+1\times 1=1 \Rightarrow f(x_n)=f(n)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$T_{0,0}=I_T=\frac{h}{2}[f_0+f_n]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+1\right]=0.75$$

ب) نأخذ $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2} \Leftarrow n=2$

$$x_0=0+0\times\frac{1}{2}=0 \Rightarrow f(x_0)=f_0=\frac{1}{1+0}=1$$

$$x_1=0+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x_1)=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$x_n=0+2\times\frac{1}{2}=1 \Rightarrow f(x_n)=f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$T_{0,1}=I_T=\frac{h}{2}[f_0+2f_1+f_n]=\frac{1}{4}\left[1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right]=0.708333$$

ج) نأخذ $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4} \Leftarrow n=4$

$$x_0=0+0\times\frac{1}{4}=0 \Rightarrow f(x_0)=f_0=\frac{1}{1+0}=1$$

$$x_1=0+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow f(x_1)=f(\frac{1}{4})=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

$$x_2=0+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x_2)=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$x_3=0+3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow f(x_3)=f(\frac{3}{4})=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}$$

$$x_n=0+4\times\frac{1}{4}=1 \Rightarrow f(x_n)=f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$T_{0,2}=I_T=\frac{h}{2}[f_0+2f_1+2f_2+2f_3+f_n]=\frac{1}{8}\left[1+\frac{8}{5}+\frac{4}{3}+\frac{8}{7}+\frac{1}{2}\right]$$
$$=0.697024$$

د) نأخذ $n = 8 \Leftarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$

$$x_0 = 0 + 0 \times \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow f(x_0) = f_0 = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$x_1 = 0 + 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

$$x_2 = 0 + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$x_3 = 0 + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{3}{8}) = \frac{1}{1+\frac{3}{8}} = \frac{8}{11}$$

$$x_4 = 0 + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_4) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$x_5 = 0 + 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow f(x_5) = f(\frac{5}{8}) = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$$

$$x_6 = 0 + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \Rightarrow f(x_6) = f(\frac{6}{8}) = \frac{1}{1+\frac{6}{8}} = \frac{8}{14}$$

$$x_7 = 0 + 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow f(x_7) = f(\frac{7}{8}) = \frac{1}{1+\frac{7}{8}} = \frac{8}{15}$$

$$x_n = 0 + 8 \times \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow f(x_n) = f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$T_{0,3} = I_T = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_n]$$

$$= \frac{1}{16}\left[1 + \frac{16}{9} + \frac{8}{5} + \frac{16}{11} + \frac{4}{3} + \frac{16}{13} + \frac{16}{14} + \frac{16}{15} + \frac{1}{2}\right] = 0.69412185$$

باستخدام قانون رومبرك

$$T_{m,k} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k})$$

$$T_{1,0} = \frac{1}{4^1 - 1}(4^1 T_{1-1,0+1} - T_{1-1,0}) = \frac{1}{3}(4T_{0,1} - T_{0,0})$$

$$= \frac{1}{3}(4 \times 0.708333 - 0.7500) = 0.69444$$

$$T_{1,1}=\frac{1}{4^1-1}(4^1T_{1-1,1+1}-T_{1-1,1})=\frac{1}{3}(4T_{0,2}-T_{0,1})$$
$$=\frac{1}{3}(4\times 0.697024-0.708333)=0.693254$$
$$T_{1,2}=\frac{1}{4^1-1}(4^1T_{1-1,2+1}-T_{1-1,2})=\frac{1}{3}(4T_{0,3}-T_{0,2})$$
$$=\frac{1}{3}(4\times 0.694122-0.697024)=0.693155$$
$$T_{2,0}=\frac{1}{4^2-1}(4^2T_{2-1,0+1}-T_{2-1,0})=\frac{1}{15}(16T_{1,1}-T_{1,0})$$
$$=\frac{1}{15}(16\times 0.693254-0.69444)=0.693175$$
$$T_{2,1}=\frac{1}{4^2-1}(4^2T_{2-1,1+1}-T_{2-1,1})=\frac{1}{15}(16T_{1,2}-T_{1,1})$$
$$=\frac{1}{15}(16\times 0.6931155-0.693254)=0.693148$$
$$T_{3,0}=\frac{1}{4^3-1}(4^3T_{3-1,0+1}-T_{3-1,0})=\frac{1}{63}(64T_{2.1}-T_{2.0})$$
$$=\frac{1}{63}(64\times 0.693148-0.693175)=0.693147$$

جدول:

	h^2	h^4	h^6	h^8
$\frac{h}{1}$	$T_{0,0}$			
$\frac{h}{2}$	$T_{0,1}$	$T_{1,0}$		
$\frac{h}{4}$	$T_{0,2}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$	
$\frac{h}{8}$	$T_{0,3}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{3,0}$

	h^2	h^4	h^6	h^8
$\frac{h}{1}$	**0.75000**			
$\frac{h}{2}$	**0.708333**	**0.69444**		

$\frac{h}{4}$	**0.697024**	**0.693254**	**0.693175**	
$\frac{h}{8}$	**0.69412185**	**0.693155**	**0.693148**	**0.693147**

2- $I = \int_0^1 \frac{1}{x^3+12}dx$

نحسب أولا $T_{0,0}, T_{0,1}, T_{0,2}, T_{0,3}$.

الحل:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right], x_i = x_0 + ih$$

أ) نأخذ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{1} = 1 \Leftarrow n = 1$

$$x_0 = 0 + 0 \times 1 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = \frac{1}{0+12} = \frac{1}{12}$$

$$x_n = 0 + 1 \times 1 = 1 \Rightarrow f(x_n) = f(1) = \frac{1}{1+12} = \frac{1}{13}$$

$$T_{0,0} = I_T = \frac{h}{2}[f_0 + f_n] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right] = 0.80128$$

ب) نأخذ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} \Leftarrow n = 2$

$$x_0 = 0 + 0 \times \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = \frac{1}{0+12} = \frac{1}{12}$$

$$x_1 = 0 + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{13})^3 + 12} = \frac{8}{97}$$

$$x_n = 0 + 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow f(x_n) = f(1) = \frac{1}{1+12} = \frac{1}{13}$$

$$T_{0,1} = I_T = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + f_n] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{12} + \frac{16}{97} + \frac{1}{13}\right] = 0.81301$$

ج) نأخذ $n = 4 \Leftarrow \quad h = \frac{b-a}{} = \frac{1-0}{} = \frac{1}{}$

$$x_0 = 0 + 0 \times \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{12}$$

$$x_1 = 0 + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{(\frac{1}{4})^3 + 12} = \frac{64}{769}$$

$$x_2 = 0 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2 + 12} = \frac{8}{97}$$

$$x_3 = 0 + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{(\frac{3}{4})^3 + 12} = \frac{64}{795}$$

$$x_n = 0 + 4 \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow f(x_n) = f(1) = \frac{1}{1+12} = \frac{1}{13}$$

$$T_{0,2} = I_T = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_n] = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{12} + \frac{128}{769} + \frac{16}{97} + \frac{128}{795} + \frac{1}{13}\right] = 0.081583$$

د) خذ $n = 8 \Leftarrow \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$

$$x_0 = 0 + 0 \times \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = \frac{1}{0+12} = \frac{1}{12}$$

$$x_1 = \frac{1}{8} \Rightarrow f(x_1) = \frac{512}{6145}, x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_2) = \frac{64}{795}$$

$$x_3 = \frac{3}{8} \Rightarrow f(x_3) = \frac{512}{6171}, x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_4) = \frac{8}{97}$$

$$x_5 = \frac{5}{8} \Rightarrow f(x_5) = \frac{512}{6269}, x_6 = \frac{6}{8} \Rightarrow f(x_6) = \frac{64}{795}$$

$$x_7 = \frac{7}{8} \Rightarrow f(x_7) = \frac{512}{6487}, x_n = 1 \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{13}$$

$$T_{0,3} = I_T = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_n]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{12} + \frac{1024}{6145} + \frac{128}{795} + \frac{1024}{6171} + \frac{16}{97} + \frac{1024}{6269} + \frac{128}{795} + \frac{1024}{6478} + \frac{1}{13}\right]$$
$$= 0.16265$$

ألان باستخدام قانون رومبرك:

$$T_{m,k} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k})$$

$$T_{1,0} = \frac{1}{4^1 - 1}(4^1 T_{1-1,0+1} - T_{1-1,0}) = \frac{1}{3}(4T_{0,1} - T_{0,0})$$
$$= \frac{1}{3}(4 \times 0.081301 - 0.080128) = 0.081692$$

$$T_{1,1} = \frac{1}{4^1 - 1}(4^1 T_{1-1,1+1} - T_{1-1,1}) = \frac{1}{3}(4T_{0,2} - T_{0,1})$$
$$= \frac{1}{3}(4 \times 0.081583 - 0.081301) = 0.081677$$
$$T_{1,2} = \frac{1}{4^1 - 1}(4^1 T_{1-1,2+1} - T_{1-1,2}) = \frac{1}{3}(4T_{0,3} - T_{0,2})$$
$$= \frac{1}{3}(4 \times 0.16265 - 0.081583) = 0.1996723$$
$$T_{2,0} = \frac{1}{4^2 - 1}(4^2 T_{2-1,0+1} - T_{2-1,0}) = \frac{1}{15}(16T_{1,1} - T_{1,0})$$
$$= \frac{1}{15}(16 \times 0.081677 - 0.081692) = 0.081676$$
$$T_{2,1} = \frac{1}{4^2 - 1}(4^2 T_{2-1,1+1} - T_{2-1,1}) = \frac{1}{15}(16T_{1,2} - T_{1,1})$$
$$= \frac{1}{15}(16 \times 0.189623 - 0.081677) = 0.1968194$$
$$T_{3,0} = \frac{1}{4^3 - 1}(4^3 T_{3-1,0+1} - T_{3-1,0}) = \frac{1}{63}(64T_{2.1} - T_{2.0})$$
$$= \frac{1}{63}(64 \times 0.1968194 - 0.081676) = 0.198647$$

جدول

	h^2	h^4	h^6	h^8
$\frac{h}{1}$	**0.080128**			
$\frac{h}{2}$	**0.081301**	**0.081692**		
$\frac{h}{4}$	**0.081583**	**0.081677**	**0.081676**	
$\frac{h}{8}$	**0.16265**	**0.1896723**	**0.1968194**	**0.198647**

إعداد:
أ.يونس حازم
أ.صهيب عبد الجبار