جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

التحليل الرياضي

Mathematical analysis

المرحلة الثالثة

المدرسون:
م. د. مروان عزيز جردو
م. نادية عدنان عبد الرزاق

١٢

Subject
Year Month Date

كورس تحليلي د.مروان

الفصل الخامس (الاستمرارية) Continuity

تعريف اول

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيق يقال بأن التطبيق f مستمر عند النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ اذا تحقق ما يلي ($x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة)

١- الدالة معرفة ($f(x_0)$ معرفة)

٢- النهاية موجودة

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

٣- $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ (النهاية = القاعدة).

تعريف ثاني

لتكن $f, S \to \mathbb{R}$ حيث $S \subseteq \mathbb{R}$

يقال بان الدالة مستمرة عند النقطة x_0 اذا كان $(x_0 \in S)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

حيث δ تعتمد على كل من ε, x_0 ← يكتب عليها

تعريف الاستمرارية في الفضاء المتري

ليكن (X, d) و (Y, d') فضاء متريين وليكن $f: X \to Y$ تطبيق نقول f مستمر عند النقطة $x_0 \in X$ اذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

يجب فهم

$$x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject

Year: Month: Date:

Sa Su Mo Tu We Th Fr

كيف يفيد بل سبرهنات ؟؟

لعينك اخر لكل كرة $B_\epsilon(f(x_0))$ في Y توجد كرة

$B_\delta(x_0)$ بحيث ان $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$

ملاحظة :- تكون الدالة مستمرة اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط مجالها

مهمة جداً جداً

مبرهنة :- ليكن كل من (X, d) ، (Y, d_1) فضاء متري فان التطبيق $f: X \to Y$ يكون مستمر اذا و فقط اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X

بمعنى اذا كانت V معبوعة ومفتوحة في Y فان $f^{-1}(V)$ يكون مجموعة مفتوحة في X

البرهان :- نفرض ان $f: X \to Y$ مستمر

① يجب ان نبرهن ان الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X

② نفرض ان V مجموعة مفتوحة في Y

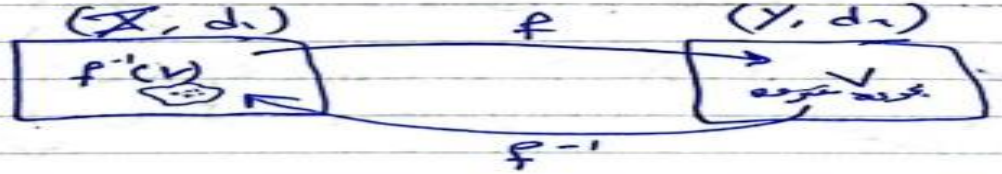
③ يجب ان نبرهن ان $f^{-1}(V)$ هي مجموعة مفتوحة في X

حيث $f^{-1}(V) = \{ x \in X : f(x) \in V \}$

④ الان لنكن $x_0 \in f^{-1}(V)$ يعني ان $f(x_0) \in V$

وبما ان V مجموعة مفتوحة فان توجد كرة $B(f(x_0))$ بحيث ان

$f(x_0) \in B \subseteq (f(x_0)) \subseteq V$



توضيح ←

وبما ان f تطبيق مستمر حسب الفرض فانة توجد كرة $B_\delta(x_0)$ في X بحيث ان

$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$

$\Rightarrow f(B_\delta(x_0)) \subseteq V$

$\Rightarrow x_0 \in B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(V)$

$\therefore f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة

الاتجاه التالي: نفترض ان الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X

يجب ان نبرهن ان f مستمرة

لتكن $x_0 \in X$ ، ولتكن $B_\varepsilon(f(x_0))$ كرة مفتوحة نصف قطرها ε ومركزها $f(x_0)$ من Y

وحسب الفرض (كل كرة مجموعة مفتوحة) $B_\varepsilon(f(x_0))$ مجموعة مفتوحة في Y

وعليه $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ مجموعة مفتوحة في X. (حسب الفرض)

وحسب التعريف السابق توجد $B_\delta(x_0)$ في X بحيث

$x_0 \in B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$

$f(x_0) \in f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$

$\therefore f$ تطبيق مستمر

Subject
Year Month Date

مبرهنة :- ليكن كل من $(X, \mathcal{J}, \mathcal{J}')$ و $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{U}')$ فضاء متري وليكن $f: X \to Y$ تطبيق فان f مستمر اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X.

البرهان:

لنفرض ان $f: X \to Y$ تطبيق مستمر

ونفرض ان V مجموعة مغلقة في Y يجب ان نبرهن $f^{-1}(V)$ مجموعة مغلقة في X

يجب ان نبرهن $f^{-1}(V)$ مجموعة مغلقة في X

الآن، بما ان V مجموعة مغلقة في Y فان $V^c = Y \setminus V$ مجموعة مفتوحة في Y

وحسب المبرهنة [ ] فان بما ان المبرهنة متطابقة

فان $f^{-1}(V^c) = X - f^{-1}(V)$ هي مجموعة مفتوحة في X

وعليه $f^{-1}(V)$ مجموعة مغلقة في X.

العكس، نفرض ان الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X. يجب ان نبرهن ان f مستمر

ليكن V مجموعة مفتوحة في Y

فان $Y - V$ مجموعة مغلقة في Y

$f^{-1}(Y \setminus V) = X - f^{-1}(V)$ مجموعة مغلقة في X (بما ان)

فان $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X.

وحسب المبرهنة [ ] f تطبيق مستمر.

فان

Subject
Year: Month: Date:

* ممكن تغيير رموز

وبالمثل x_0 حد $\langle x_n \rangle$
و $\delta > 0$ يوجد عدد صحيح موجب $(k \in \mathbb{Z}^+)$ بحيث ان
$d_1(x_n, x_0) < \delta \quad \forall n > k$

فان

$$d(x_n, x_0) < \delta \quad \forall n > k \qquad (*)$$

من (1) (2) نفعل على ان
$d_2(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall n > k$

$\therefore f(x_0)$ حد $\langle f(x_n) \rangle$ في Y

الاتجاه الثاني: نفرض ان $f(x)$ متصل عند x_0 تقريبا $\langle x_n \rangle$ متقارب $\Rightarrow \langle f(x_n) \rangle$ متقارب

نفرض ان f تطبيق متصل
نفرض ان f تطبيق غير متصل (نفرض العكس)

العبارة $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ ، $d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

نفيها $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ، $d_1(x, x_0) < \delta$ و $d_2(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$

$\Leftarrow$ يوجد $\epsilon > 0$ بحيث ان لكل $\delta > 0$

لكن $\delta = \frac{1}{n}$ فان يوجد $x_n \in X$ بحيث ان
$d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$
اذا كان $\delta = \frac{1}{n}$ فانه يوجد على الاقل $x_n \in X$ بحيث ان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year: Month: Date:

$d_1(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \Rightarrow d_2(f(x_2), f(x_0)) \geq \epsilon$

$\vdots$ $\vdots$

$\exists x_n \in X$ بحيث ان $\frac{1}{n} = \epsilon$ نأخذ $\Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$

$d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$

نلاحظ ان $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ متقاربة لانه حسب خاصية ارخميدس

$\forall n > K \quad d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \epsilon$

بحسب التعريف $d_2(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ وهذا يناقض فرضنا ان $f(x_n)$ لا تقترب $\therefore$ f غير مستمر

إستراحة:

اللهم دلني على الطريق الذي يطمئن فيه قلبي اختر لي ولا تخيرني في جميع أموري..

Mathboy 2005

2/P

Subject
Year Month Date

مبرهنة / كل تطبيق ثابت بين فضائين متريين يكون مستمر

(1) البرهان / لتكن $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تطبيق ثابتاً
$\Leftarrow$ يوجد $b\in Y$ بحيث ان $f(x)=b \quad \forall x\in X$
نفرض ان $x_0\in\mathbb{R}$ وان $|x-x_0|<\delta$ عندئذٍ
لتكن $\epsilon>0$
$d_2(f(x)-f(x_0)) = d_2(b,b) = |b-b| = 0 < \epsilon$
$\Leftarrow$ f مستمر عند x_0 حيث x_0 اختياري
$\Leftarrow$ f مستمر.

(2) لتكن $f: X\to Y$ تطبيق ثابت
$\Leftarrow$ يوجد $b\in Y$ بحيث ان $f(x)=b \quad \forall x\in X$

الآن / لتكن V مجموعة مفتوحة في Y
$\Leftarrow$ كل الاعداد في X لها صورة ثابتة $\to$ اذا كل عنصر صورته b.

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} X & b\in V \\ \emptyset & b\notin V \end{cases}$$

برهان $X, \emptyset$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ f مستمر بمبرهنة [أنظر]

مبرهنة / التطبيق الذاتي يكون مستمر.

(3) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالشكل $f(x)=x$ فان f تطبيق مستمر

البرهان / لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تطبيق لتكن $x_0\in X=\mathbb{R}$ ، $\epsilon>0$
$|x-x_0|<\delta$
let $\delta=\epsilon>0$ ← لها ذاتي و δ اختيارية.

$d(f(x),f(x_0)) = d(x,x_0) < \delta = \epsilon \quad \forall x\in X$
$\Leftarrow$ f مستمر عند x_0 وبما ان x_0 اختيارية
$\Leftarrow$ f مستمر.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالشكل $f(x) = x^2$ فإن f تطبيق مستمر.

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ ، ولتكن $\epsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$
$$= |x - x_0| \; |x + x_0|$$

نريد التخلص من x لأنها متغيرة، ونريدها بدلالة x_0 لأنها ثابتة

$$= |x - x_0| \; |x - x_0 + x_0 + x_0|$$
$$= |x - x_0| \; |x - x_0 + 2x_0|$$
$$\leq \delta \left[|x - x_0| + |2x_0| \right]$$
$$= \delta \left(\delta + 2|x_0| \right)$$

لنفرض أن $\epsilon = \delta(\delta + 2|x_0|)$

لنحصل على أن $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

نلاحظ أن ϵ تتعلق على δ و x_0.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year: Month: Date:

برهنة/ ليكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ والتطبيق f مستمر عند x_0 و g تطبيق مستمر عند $f(x_0)$ فان التطبيق $g \circ f$ مستمر عند x_0 حيث ان $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

البرهان :- ليكن $\langle x_n \rangle$ متتابعة في X تقترب من x_0 وبما ان f مستمر عند x_0 فان $f(x_n) \to f(x_0)$
وبما ان التطبيق g مستمر عند $f(x_0)$ فان
$g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$
اي ان $g \circ f(x_n) \to g \circ f(x_0)$
$\therefore$ $g \circ f$ تطبيق مستمر عند x_0.

التطبيقات الحقيقية :- هي التطبيقات التي سنطلقها بحرية حيث ان X فضاء متري ومستمر ها مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية اي ان $f: X \to \mathbb{R}$

التطبيقات الحقيقية المستمرة $C(X)$:- ليكن $f: X \to \mathbb{R}$ هي مجموعة كل التطبيقات الحقيقية المستمرة من الفضاء المتري X الى مجموعة الاعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز $C(X)$ وبصورة خاصة اذا كانت $X = [a,b]$ يرمز لها بالرمز $C([a,b])$

Subject
Year Month Date

Su Mo Tu We Th Fr Sa

نظرية: اذا كانت $f: X \to \mathbb{R}$ و $g: X \to \mathbb{R}$ دوال كل من f و g تطبيقاً مستمراً فان

① $f+g$ تطبيق مستمر حيث ان

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

البرهان لكي كل من f و g تطبيق مستمر حيث ان

$f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$

لكن $x_0 \in X$ ولتكن $\langle x_n \rangle$ متتابعة في X تقترب من x_0

حسب نظرية الثالثة [لتكن $(Y, d_1) \to (X, d)$ f تطبيق ولتكن $x_0 \in X$ فان التطبيق f مستمر اذا وفقط اذا لكل متتابعة $\langle x_n \rangle$ متقاربة الى x_0 في X فان المتتابعة $\langle f(x_n) \rangle$ تقترب من $f(x_0)$ في Y]

وبما ان f تطبيق مستمر فان

$$f(\langle x_n \rangle) \to f(x_0)$$
$$g(\langle x_n \rangle) \to g(x_0)$$

وحسب قضية العمليات على المتتابعات [اذا كان $\langle a_n \rangle \to a$ و $\langle b_n \rangle \to b$ فان

① $\langle a_n + b_n \rangle \to a+b$ ② $\langle a_n b_n \rangle \to ab$

③ $\langle a_n / b_n \rangle \to a/b$ ④ $\langle |a_n| \rangle \to |a|$]

فان $f(\langle x_n \rangle) + g(\langle x_n \rangle) \to f(x_0) + g(x_0)$

$\Rightarrow (f+g)\langle x_n \rangle \to (f+g)(x_0)$

$\therefore f+g$ تطبيق مستمر.

* كلية ثابتة في جميع الاقواس التغير نقول بوكلية فان

② $f.g$ مستمر حيث ان $(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \forall x \in X$

البرهان [كلية]

$f(\langle x_n \rangle) . g(\langle x_n \rangle) \to f(x_0).g(x_0)$

$(f.g)(x_n) \to (f.g)(x_0)$

$\therefore f.g$ مستمر.

③ $\forall a \in \mathbb{R}$ فان af تطبيق مستمر حيث ان

$$(af)(x) = a f(x) \quad \forall x \in X$$

$a.f(x_n) \to a.f(x_0) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

البرهان [كلية]

$(a.f)(x_n) \to (a.f)(x_0)$

$\therefore a.f$ مستمر

Subject
Year: Month: Date:

④ اذا كان $g(x) \neq 0$ فان f/g تطبيق مستمر حيث ان

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

البرهان [كلاسيكية]

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$\frac{f}{g}(x_n) \to \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

$\therefore \frac{f}{g}$ مستمر

⑤ $|f|$ تطبيق مستمر حيث ان $|f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

البرهان [كلاسيكية]

$$|f(x_n)| \to |f(x_0)|$$

$$|f|(x_n) \to |f|(x_0)$$

$\therefore |f|$ تطبيق مستمر

التطبيقات الحقيقية العددية $B(X)$

لتكن $f: X \to \mathbb{R}$ تطبيق نقول ان f محدودة (او محدد على X) اذا وجد عدد حقيقي موجب $(M \in \mathbb{R}^+)$ بحيث ان

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X$$

بعبارة اخرى :- يكون f محدد اذا كان مستقر f محدودة جزئية محدودة من $\mathbb{R}$ حيث مستقرها حيث مستقرها هي مجموعة $f(x)$ ؛ $x \in X$ ؟

مثال/ لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وان $f(x) = 3$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ هل f محدد ؟

الحل/ اذا كان $M = 4$ فان $|f(x)| = |3| = 3 < M = 4$

$\therefore f$ محدد ومستمر

مثال/ لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وان $f(x) = x$ هل f محدد ؟

الحل/ نلاحظ ان f مستمرة (لانها متعددة حدود) ولكن غير محدد

$$\nexists M \in \mathbb{R}^+ \; ; \; |f(x)| \leq M \quad \forall x \in X = \mathbb{R}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year Month Date

S | Su | Mo | Tu | W | Th | F

قضية :- اذا كانت كل من $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ تطبيق سفيه فان

① $f+g$ سفيه ② $f.g$ سفيه ③ $\frac{f}{g}$ سفيه حيث $g(x) \neq 0$

④ $\forall a \in \mathbb{R}$ فان af سفيه ⑤ $|f|$ سفيه

البرهان ①- [بما ان f تطبيق سفيه فانه يوجد $M_1 \in \mathbb{R}$ بحيث ان $|f(x)| \leq M_1 \ \forall x \in X$ وحيث ان g تطبيق سفيه فانه يوجد $M_2 \in \mathbb{R}$ بحيث ان $|g(x)| \leq M_2 \ \forall x \in X$] ← من كليشة ثابتة

اذن $|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$

$\leq M_1 + M_2 = M_3 \ \forall x \in X$

مما تقدم $f+g$ تطبيق سفيه

البرهان ② [كليشة]

اذن $|(f.g)(x)| = |f(x).g(x)| = |f(x)|.|g(x)| \leq M_1 . M_2 = M_3 \ , \forall x \in X$

$\therefore f.g$ سفيه

البرهان ③ [كليشة]

اذن $\left|\frac{f}{g}(x)\right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{M_1}{M_2} = M_3 \ \forall x \in X$

$\therefore \frac{f}{g}$ سفيه

البرهان ④ [كليشة] تعد بان f

$||f|(x)| = |f(x)| = |f(x)| \leq M_1 \ \forall x \in X$

$\therefore |f|$ سفيه

البرهان ⑤ [كليشة] تعد بان f

$|(af)(x)| = a|f(x)| \leq M_1 \ \forall x \in X$

$\therefore af$ سفيه .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year: Month: Date:

مبرهنة :- لتكن كل من X, X' فضاء متري و ليكن $f: X \to X'$ تطبيق مستمر اذا كان X متراصاً (فضاء متراص) فان مجموعة $f(X)$ متراصة في X'.

البرهان :- لتكن $\{V_n\}_{n\in\Lambda}$ غطاء مفتوح لـ $f(X)$ و ليكن $x \in X$

$\Leftarrow$ يوجد $n \in \Lambda$ بحيث $f(x) \in V_n$

و بما ان V_n مجموعة مفتوحة لكل $n \in \Lambda$ و f تطبيق مستمر فان $f^{-1}(V_n)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $n \in \Lambda$ [لكون f تطبيق مستمر اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة]

نحصل على ان $x \in f^{-1}(V_n)$ لكل $n \in \Lambda$

الآن $\forall n \in \Lambda$ ، $x \in U_n V_n \Leftarrow f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(U_n V_n)$

$\Leftarrow X \subseteq U_n f^{-1}(V_n)$

X مجموعة متراصة

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

$$f(X) = x \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (V_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\therefore f(X)$ مجموعة متراصة.

Subject: Uniform Continuity

Year: Month: Date:

م/ ع د. سردان

الاستمرارية المنتظمة :- ليكن كلاً من (X, d_1) ، (Y, d_2) فضاءين متريين.

ولتكن $f: X \to Y$ تطبيق

يقال بأن f مستمر بصورة منتظمة اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$d_1(x, y) < \delta$

$d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$

لكل $x, y \in X$ اذا كان

فان

نلاحظ ان δ تعتمد على ϵ فقط ولا تعتمد على x

بصورة اخرى

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ فضاء متري $\to$ فضاء متري

$|x - y| < \delta$

$d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ فان

او

$f: X \to \mathbb{R}$

$d_X(x, x_0) < \delta$

$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ فان

او

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$|x - y| < \delta$

$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ فان

ملاحظات

① كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة.
واضح من خلال تعاريف.

② ليست كل مستمرة تكون مستمرة بانتظام (بشكل عام)
بعض ممكن دالة تحقق.

مثال/ لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالشكل $f(x) = x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$

الحل/ ليكن $\epsilon > 0$ ، نبحث عن $\delta > 0$ ؟؟

نفرض ان $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{|x| + |y| + 2}\}$

$|x - y| < \delta$

Subject
Year: Month: Date:

الحل:

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x-y)\cdot(x+y)|$$

$$= |x-y|\,|x+y|$$

$$< \delta \cdot |x-y+2y|$$

$$< \delta\,(|x-y|+2|y|)$$

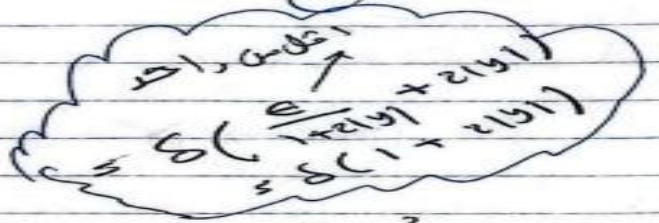
$$< \delta(\delta + 2|y|)$$

$$< \delta(1+2|y|) = \epsilon$$

بسبب $\delta < 1$ و بسبب $\delta < \frac{\epsilon}{1+2|y|}$

لذا نفرض أن $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{1+2|y|}\}$

نوضح



هنا $\delta = \frac{\epsilon}{1+2|y|}$

∴ الدالة مستمرة.

ولكن الدالة ليست مستمرة بصورة منتظمة

لأننا إذا اخترنا $\epsilon = 1 > 0$ ولتكن $\delta > 0$

و لتكن $x = n$ ، $y = n + \frac{1}{n}$ ، $n > 0$

$$|x-y| = |n - n - \tfrac{1}{n}| = |\tfrac{1}{n}| = \tfrac{1}{n} < \delta$$

حسب خاصية أرخميدس.

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |n^2 - (n+\tfrac{1}{n})^2|$$

$$= |n^2 - n^2 - 2 - \tfrac{1}{n^2}| = |-1|\,|2 + \tfrac{1}{n^2}| = 2 + \tfrac{1}{n^2} > 2 > 1 = \epsilon$$

$n > 0 \Leftarrow$ عجمة صغيرة $+ 2 \Leftarrow$ قيمة أكبر من 2 وموجبة.

∴ ليست مستمرة بانتظام.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سبب/ حلان لان $[0,2]$ متراص
$(0,2)$
$[0,2)$
$(0,2]$

حالة منفاد مشترك.

مثال/ لتكن $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ معرفة كالآتي

$f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0,2]$

حلان f دالة متصلة باستخدام متتالية ؟

الحل/ لتكن $\epsilon > 0$ ، نبحث عن $\delta > 0$ $\quad \delta = \frac{\epsilon}{4}$

ولتكن $x, y \in [0,2]$

و لتكن $|x-y| < \delta$

الآن

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x-y)(x+y)|$$

$$= |x-y|\cdot|(x+y)|$$

$$\leq |x-y|\,(|x|+|y|) \quad \leftarrow \text{اقل اكبر رقم من عشرة } 2+2=4$$

$$< 4\delta = \epsilon$$

$\delta = \frac{\epsilon}{4}$ حلان

$\therefore$ الدالة متصلة وبالتالي الدالة متصلة بانتظام.

لازم يكون مغلقة لانه الدالة كسرية مثل هكذا تطلع مشكلة.

مثال/ لتكن $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالشكل

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,\infty)$

حلان f دالة متصلة باستخدام ؟ وضح ذلك ؟

الحل/ لتكن $\epsilon = 1$ نبحث عن $\delta > 0$ ؟؟

ولتكن $x = \frac{1}{n}$ ، $y = \frac{2}{n} \in (0,\infty)$ ، $n > 3$

فان

$|x-y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \delta$ حسب خاصية ارخميدس (توفر متتاليات)

الآن $|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{1/n} - \frac{1}{2/n}\right| = |n - \frac{n}{2}|$

$= \left|\frac{n}{2}\right| = \frac{n}{2} > 1 = \epsilon$

$\therefore$ الدالة ليست متصلة بانتظام.

* نلاحظ ان كل متتالية محدودة ومتقاربة لكن العكس ليس بالضرورة صحيح

مثال/ ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالشكل

$f(x)=2x-3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

اثبت ان f دالة منتظمة بانتظام ؟.

الحل/ ليكن $\varepsilon>0$ نبحث عن $\delta>0$ $\quad \delta=\frac{\varepsilon}{2}$

ولكن $x,y\in\mathbb{R}$ $\forall$

الآن

$|x-y|<\delta$

فان

$|f(x)-f(y)|=|2x-2y-3+3|=2|x-y|<2\delta=\varepsilon$

$\therefore f$ منتظمة بانتظام حيث ان $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

وهو المطلوب

مبرهنة/ ليكن X فضاء متراص ولتكن $f:X\to\mathbb{R}$ فاذا كانت f دالة مستمرة فان f دالة منتظمة بانتظام ؟

البرهان:- فيما بعد

مثال:- لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث ان

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\text{if } x\in\mathbb{Q}\\ -1 & ;\text{if } x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$$

هل ان f مستمرة ؟

الحل// ① طريقة ① عكسية. f غير مستمرة لان $\mathbb{R}$ غير مغلقة و $f^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}$ ولكن $\mathbb{Q}$ غير مغلقة ليست مغلقة $\therefore f$ ليست مستمرة.

طريقة ② الاثبات عن طريق المتتاليات

ليكن x_n عدد غير نسبي يوجد متتابعة نسبية x_n بحيث ان حسب النظرية [يوجد عدد لا نهائي من الاعداد $\mathbb{Q}$ تقترب من x بدرجة تحقيق]

ولكن $f(x_n)$ غير نسبية $\therefore f(x_n)$ غير متقاربة $\therefore f$ غير مستمرة.

دروس 4/2

Subject
Year Month Date

مرهنة :- لتكن (X,d) فضاء متري متراص اذا كان $f: X \to \mathbb{R}$ تطبيقاً مستمراً فان f تطبيق مستمر بصورة منتظمة.

البرهان:- لتكن $f: X \to \mathbb{R}$ تطبيق مستمر يجب ان نبرهن ان $f: X \to \mathbb{R}$ تطبيق مستمر بصورة منتظمة.

اي يجب ان نبرهن $\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \delta > 0 \; \forall x,y \in X \; ; \; d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (نقيض تعريف لهذا الاستلزم)

نفرض العكس اي ان التطبيق $f: X \to \mathbb{R}$ ليست مستمر بصورة منتظمة وعليه $\exists \varepsilon > 0 \; , \; \forall \delta > 0 \; ; \; \exists x,y \in X \; ; \; d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

لتكن $\delta > 0$ (بعض) ولتكن $\varepsilon > 0$

ولتكن $S_k = \{\frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ اي ان $S_k = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

لتكن كل من $\langle x_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ و $\langle y_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة متقاربة في X

ولكن $d(x_k, y_k) < \delta_k = \frac{1}{k}$

نعلم انه اذا كان $k \to \infty$ فان $d(x_k, y_k) \to 0$

الآن لتكن $\langle y_k \rangle \to a$ فان $\langle x_k \rangle \to a$ (برهن بتعريف ان a هي نقطة تراكم وهنا تظهر اهمية دراسة التقارب)

لماذا؟ لان $a \in X$ (جواب)

حيث $a \in X$ لان X فضاء متراص وعليه X مجموعة متراصة وحسب خاصية كل مجموعة متراصة تكون مغلقة $\Leftarrow X$ مغلقة

وبما ان X مغلقة فانها تحتوي على جميع نقاط تراكمها (اي ان $a \in X$)

وبما ان f تطبيق مستمر فان $f(\langle x_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}) \to f(a)$, $f(\langle y_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}) \to f(a)$

وحسب برهنة [العمليات على متتابعات اذا كان $a_n \to a_0$ و $b_n \to b_0$ فان $a_n - b_n \to a_0 - b_0$]

$|f(\langle x_k \rangle) - f(\langle y_k \rangle)| \to |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

وهذا يناقض ان التطبيق f مستمر بانتظام.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year: Month: Date:

الفصل السادس

متتابعات الدوال والمتسلسلات اللانهائية

- تقارب متتابعات الدوال:- لتكن $S \subseteq \mathbb{R}$ ولتكن $F(S)$ تمثل الدوال الحقيقية المعرفة على S أي أن

$$F(S) = \{ f : f : S \to \mathbb{R} \}$$

الآن لتكن $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال الحقيقية في $F(S)$ ولتكن f دالة في S نقول بأن $\langle f_n \rangle$ تقترب من f إذا كان لكل $n \in \mathbb{N}$، لكل $x \in S$ $f_n(x) \to f(x)$

سؤال: ما هو أنواع تقارب متتابعات الدوال؟

① تقارب نقطي ② تقارب منتظم

* نفس التعريف في البداية.

- لتكن $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال الحقيقية معرفة على S أي أن $f_n : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ولتكن f دالة حقيقية معرفة على S أي أن $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

نقول بأن المتتابعة $\langle f_n \rangle$ تقترب من f إذا كان

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S$$

- ونقول بأن $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ تقترب نقطياً أو نقطة نقطة أو تقترب بالنقطة إذا كان

$$\forall \epsilon > 0 \wedge \forall x \in S, \exists K \in \mathbb{Z}^+ , K = K(x, \epsilon)$$

بحيث أن $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n > K$

- ونقول بأن $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ تقترب من f إذا كان تقترب بصورة منتظمة

$$\forall \epsilon > 0 , \exists K \in \mathbb{Z}^+ , K = K(\epsilon) ;$$

بحيث أن $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n > K, \forall x \in S$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year: Month: Date:

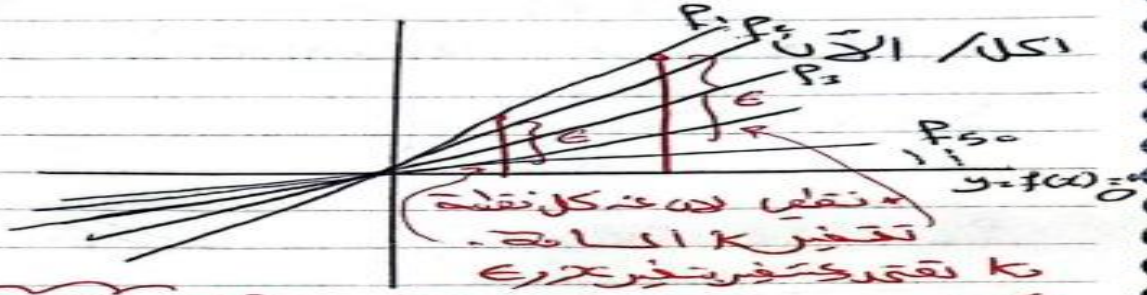
س/ اكملها مثال على تقارب نقطي

مثال/ لتكن $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دوال معرفة بالشكل

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

ولتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالشكل $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x/2$$
$$f_3(x) = x/3$$
$$\vdots$$
$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$



الشكل الآن

* نقطي لانه كل نقطة تتغير K الخاصة.
* K تعتمد وتتغير بتغير x و ϵ

لكن $\epsilon > 0$ نبحث عن $K = ? \in \mathbb{Z}^+$ بحيث ان يوجد عدد صحيح موجب K بحيث

$$\frac{1}{K} < \epsilon$$

$$\frac{x}{K} < \epsilon$$ ودليلنا ⇒

* لاحظ ان المتتابعة (f_n) تقارب $f(x) = 0$ تقاربا نقطيا بينما لا تتقارب بصورة منتظمة لانه لا يمكن ايجاد K وحيدة تحقق $\frac{x}{K} < \epsilon$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x = 2, \epsilon = \frac{1}{2}$	$x = 2, \epsilon = \frac{1}{3}$
$\frac{2}{K} < \frac{1}{2}$	$\frac{2}{K} < \frac{1}{3}$
نختار $K > 4$	نختار $K > 6$
$x = 3, \epsilon = \frac{1}{2}$	عندما نثبت ϵ تتغير K بتغير x
$K > 6$	وعندما نثبت x تتغير K بتغير ϵ

لذلك لا يوجد K واحدة لكل $\forall x \in \mathbb{R}$ بحيث $\frac{x}{K} < \epsilon$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{n} < \frac{x}{K}} < \epsilon \qquad \forall n > K$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{n} \right| < \epsilon \qquad \forall n > K$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{n} - 0 \right| < \epsilon \qquad \forall n > K$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall n > K$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year Month Date

س/ اعطي مثال عن تقارب منتظم
س/ اعطي مثال عن تقاربه منتظم ربما ليس الوقت تكون نقطياً.

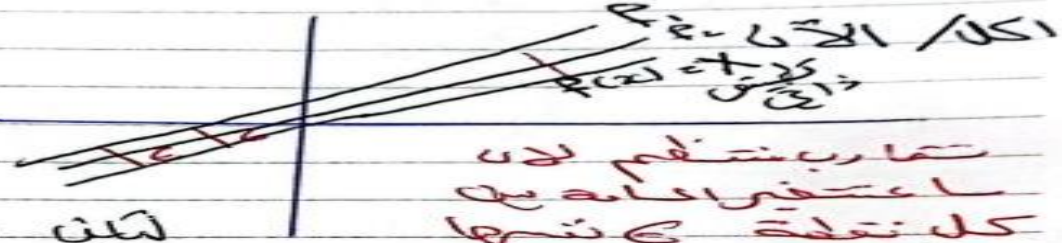
مثال/ لتكن $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالشكل كالاتي

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

و $f(x) = x$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ بالشكل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة

$f_1(x) = x + 1$
$f_2(x) = x + \frac{1}{2}$
$\vdots$
$f_n(x) = x + \frac{1}{n}$

الشكل الآتي يوضح



تقارب منتظم لان ما استغنينا عنه في كل نقطة $\in$ لنها ظلت k تعتمد عليها فقط و k لما استغنى بتغير x نقطة.

لتكن $\varepsilon > 0$ نبحث عن $k = ? \in \mathbb{N}$

* هنا تغيرت قيمة x دالة مارام تتأثر بها لانها اختفت.

$$|f_n(x) - f(x)| = |x + \frac{1}{n} - x| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} \quad \forall n > k$$

$$< \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \forall n > k$$

$\therefore$ المتتابعة $\langle f_n \rangle = \langle x + \frac{1}{n} \rangle$ متقاربة وتقترب بصورة منتظمة من $f(x) = x$ وهي ايضاً متقاربة نقطياً.

ملاحظة: كل تقارب منتظم يكون تقارب نقطي والعكس غير صحيح كما في المثال الاول. $f_n(x) = \frac{x}{n}$

س/ ما هي العلاقة بين تقارب نقطي وتقارب منتظم.

الحل/ تعريف نقطي ، منتظم

اعلاه ملاحظة اعلاه

المثال الاول $f_n(x) = \frac{x}{n}$.

* مثلاً نبرهن دالة هل هي حقيقية ام معقدة ؟

نبرهن من مجالها مقابل مثلاً $f : S \to \mathbb{R}$

دالة حقيقية مجالها مقابل $\mathbb{R}$ مثلاً $f : S \to \mathbb{C}$

دالة معقدة مجالها مقابل هو $\mathbb{C}$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year Month Date

مثال: برهن ان المتتابعة f_n المعرفة $f_n : [2,\infty) \to \mathbb{R}$ كالاتي: $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, $\forall x \in [2,\infty)$

هي متتابعة متقاربة بانتظام

الحل:- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$ — نأخذ النهاية

$= \frac{1}{1+x^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\therefore f(x) = 0 \quad f : [2,\infty) \to \mathbb{R} \quad \forall x \in [2,\infty)$

$|f_n(x) - fx| < \epsilon \quad \forall n > K, \ \forall x \in [2,\infty)$

$\left|\frac{1}{1+x^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+x^n}\right| < \left|\frac{1}{x^n}\right| = \frac{1}{x^n}$ * نريبسنون * بيقدلك سنو ريتلوه التخلوسنو. لان K تقوم على ϵ فقد لانا تقارب بانتظام.

وحسن غرة $x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \epsilon$ — ناخذ ln للأطراف

$\Rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln \epsilon$

$\therefore n > \frac{\ln \epsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ — باعتبار K.

$\therefore \left|\frac{1}{1+x^n}\right| < \frac{1}{x^n} < \frac{1}{2^n} < \epsilon$

$\forall n > K > \frac{\ln \epsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

المتتابعة متقاربة بانتظام

* ملاحظة: الاستدلال لدالة أكبر من متقاربة بانتظام او نقطياً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال 2 :- اذا كانت المتتابعة المعرفة على الفترة $[0,1]$ كالاتي

$$f_n(x) = x^n \quad , \forall x \in [0,1] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

متقاربة نقطياً ؟ وضح ذلك

الحل :- $x \geq 0$ ،

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & : \ x < 1 \\ 1 & : \ x = 1 \end{cases}$$

$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists k \in \mathbb{Z}^+ \ . \ k = k(x,\epsilon), x \in [0,1)$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ , \ \forall n > k$$

$$|x^n - 0| < \epsilon \Rightarrow x^n < \epsilon$$

الان

$$\ln(x^n) < \ln\epsilon$$

$$\Rightarrow n \ln x < \ln\epsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln\epsilon}{\ln x}$$

باعتبار k .

$$n > k > \frac{\ln\epsilon}{\ln x}$$

$$k > \frac{\ln\epsilon}{\ln x}$$ نختار $\epsilon > 0$ بان

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ , \ \forall n > k$$ نحصل على

∴ المتتابعة متقاربة نقطياً

س/ اعطي مثال لدالة معرفة وحدودة ومتقاربة نقطياً فقط.

سؤال / اذا كانت المتتابعة $\langle f_n \rangle$ متتابعة من الدوال قابلة للتكامل على $[a,b]$ تقترب من f فهل ان f تكون قابلة للتكامل على $[a,b]$ اعط برهان ان غاية الدوال القابلة ليت بالضرورة ان تكون قابلة

الجواب / نعم

لتكن $\langle f_n \rangle$ متتابعة من الدوال معرفة على الفترة $(0,2]$ بالشكل

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \frac{1}{n} \le x \le 2 \\ 0 & , x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

اكل/ عندما $n=1$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , 1 \le x \le 2 \\ 0 & , x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore |f_1(x)| \le M = 1$$

عندما $n=2$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ 0 & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore |f_2(x)| \le M = 2$$

عندما $n=3$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \frac{1}{3} \le x \le 2 \\ 0 & , x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$|f_3(x)| \le M = 3$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$f_n(x) = \frac{1}{x} \to f(x)$ $n \to \infty$

توضيح *

$|f_n(x)| \le M = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $0 < x \le 2$ ← فترة السؤال

الدالة غير مقيدة لذلك لا يمكن ايجاد عدد صحيح موجب M بحيث

$|f(x)| \le M \quad \forall x \in (0,2]$

برهنة // اذا كانت $\langle f_n \rangle$ متتابعة من الدوال معرفة بالشكل كما كما وتقترب بانتظام من الدالة f المعرفة على S فاذا كانت $\langle f_n \rangle$ مقيدة فان f مقيدة ايضاً.

البرهان :- بما ان $\langle f_n \rangle$ متتابعة من الدوال تقترب من f بانتظام فان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $K = K(\epsilon)$; $K \in \mathbb{Z}^+$ بحيث ان

$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n > K, \ x \in S$ ولكن $\epsilon = 1$

وبما ان $\langle f_n \rangle$ مقيدة فان

$|f_n(x)| \le M \quad , M \in \mathbb{R}^+ \ , \forall n \in \mathbb{N}$

الآن $|f(x)| = |f(x) - f_{K+1}(x) + f_{K+1}(x)|$

$\le |f(x) - f_{K+1}(x)| + |f_{K+1}(x)|$

$= |f_{K+1}(x) - f(x)| + |f_{K+1}(x)|$

$< 1 + M$

$f(x)$ مقيدة.

$|f_{K+1}(x) - f(x)| < 1$ بحسب تعريف النهاية عندما $\epsilon = 1$

$|f_{K+1}(x)| \le M$ بحسب فرضية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject
Year Month Date

سؤال/ اعطي مثال على متتابعة من الدوال المستمرة تقترب من دالة غير مستمرة

الحل/ لتكن $f_n(x) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

معرفة بالشكل $f_n(x) = x^n \quad , \forall x \in [0,1] \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$f_1(x) = x$
$f_2(x) = x^2$
$f_3(x) = x^3$
⋮

$f_n(x) = x^n \quad , \langle f_n \rangle = \langle x, x^2, x^3, \cdots \rangle$
متتابعة من الدوال المستمرة

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le x < 1 \\ 1 & , \ x = 1 \end{cases}$$

بما أن $\{0\}$ مجموعة مغلقة (لا تحتوي على نقاط نهايتها).
$f^{-1}(\{0\}) = [0,1)$ غير مغلقة

دالة $f(x)$ غير مستمرة.