المعادلات التفاضلية الاعتيادية/المرحلة الثانية	د.عزام صلاح الدين
Ordinary differential equations	

المحاضرة الاولى

المعادلة التفاضلية Differential Equation (D.E)

هي معادلة تحتوي على معاملات تفاضلية أو مفاضلات (مشتقات).

المعادلة التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differential Equation (ODE)

هي المعادلة التي تحتوي على متغير معتمد و متغير مستقل واحد و تحتوي على مشتقات

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3 \qquad (1)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad (3)$$

$$\left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = k\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (4)$$

المعادلة التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation (PDE)

هي المعادلة التي تحتوي على متغير معتمد وتحتوي على أكثر من متغير مستقل وتكون معاملاتها التفاضلية الجزئية بالنسبة لأي من تلك المتغيرات المستقلة مثل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (5)$$

رتبة المعادلة التفاضلية Order of DE

وهي رتبة أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

درجة المعادلة التفاضلية Degree of D.E

وهي أس اعلى مشتقى تظهر في المعادلة التفاضلية بشرط ان تكون **المعادلة خالية من الجذور والقوى الكسرية.**

وكمثال على ذلك نلاحظ ان المعادلة (1) من الرتبة الأولى والدرجة الأولى والمعادلة (2) من الرتبة الثانية والدرجة الأولى والمعادلة (3) من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية والمعادلة (4) من الرتبة الثانية والدرجة الثانية وذلك بعد أن تخلصنا من القوى الكسرية (كيف تم ذلك؟).

بيّن رتبة ودرجة كلاً من المعادلات التفاضلية الاتية:

$$\mathbf{1)}\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

الحل: بما أن المعادلة تحتوي على جذور فأول خطوة تكون التخلص من الجذور

نكتب المعادلة بالشكل التالي:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 = \left(1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3\right)^2 = \left(\left(1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^6 = 1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

وبذلك تكون المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة السادسة.

حل المعادلة التفاضلية Solution of D.E

هو أي علاقة بين المتغيرات المستقلة والمعتمدة **خالية من المشتقات وتحقق المعادلة التفاضلية**.

مثال: أثبت أن $y = e^{2x}$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$.

الحل:

في هذا النوع من الأسئلة يجب أن نشتق الدالة المعطاة y حسب رتبة المعادلة أي إذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى نشتق مرة واحدة وإذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية نشتق مرتين وهكذا وبعد الاشتقاق نقوم بتعويض الدالة y ومشتقاتها في المعادلة الأصلية ثم نبسط قدر الإمكان فإذا كان الطرف الأيمن مساوياً للطرف الأيسر فإن الدالة y تحقق المعادلة وتكون حلاً لها

إذا كانت $y = e^{2x}$ فإن

$$y' = 2e^{2x}, \quad y'' = 4e^{2x}$$

وبالتعويض في المعادلة الاصلية نجد أن

$$y'' + y' - 6y = 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} = 0$$

إذن $y = e^{2x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال: أثبت أن $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + x^2 + x$ حيث A, B ثوابت اختيارية يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 2y = 3 - 2x^2$.

الحل:

$$y' = Ae^{x} - 2Be^{-2x} + 2x + 1$$

$$y'' = Ae^{x} + 4Be^{-2x} + 2$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$Ae^{x} + 4Be^{-2x} + 2 + Ae^{x} - 2Be^{-2x} + 2x + 1 - 2Ae^{x} - 2Be^{-2x} - 2x^2 - 2x = 3 - 2x^2$$

الحل العام والحل الخاص General Solution and Particular Solution

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية.

اما الحل الخاص فهو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية ويكون خالياً من الثوابت الاختيارية وقد نحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة، وسنتطرق الى هذين النوعين من الحلول بصورة مفصلة في الفصول القادمة بالإضافة الى الحل المنفرد.

فمثلاً الحلول $y = e^x, y = 2e^x, y = \frac{8}{3}e^x$ هي حلول خاصة للمعادلة التفاضلية $y' = y$ بينما الحل $y = ce^x$ يمثل حلاً عاماً لأن c ثابت اختياري.

تكوين المعادلة التفاضلية

نستطيع اشتقاق او تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية الموجودة في العلاقة التي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية وذلك باشتقاق العلاقة أو الحل بالاعتماد على عدد الثوابت الاختيارية وبواسطة إجراءات حسابية معينة نحصل على الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية المطلوبة.

<u>مثال:</u> من العلاقة $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ كون معادلة تفاضلية خالية من الثوابت الاختيارية a, b, c .

<u>الحل:</u>

باشتقاق العلاقة نحصل على

$$2x + 2yy' + 2a + 2by' = 0$$

بالقسمة على 2 وجمع الحدود المتشابهة

$$x + a + (y + b)y' = 0 \qquad (1)$$

نشتق مرة ثانية فنحصل على

$$1 + (y + b)y'' + (y')^2 = 0 \qquad (2)$$

نشتق مرة ثالثة فنحصل على

$$(y + b)y''' + y'y'' + 2y'y'' = 0$$

$$(y+b)y''' + 3y'y'' = 0 \qquad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن

$$1 + (y')^2 = -(y+b)y'' \qquad (4)$$

ومن المعادلة (3) نجد أن

$$3y'y'' = -(y+b)y''' \qquad (5)$$

وبقسمة المعادلة (4) على المعادلة (5) نحصل على

$$\frac{1+(y')^2}{3y'y''} = \frac{-(y+b)y''}{-(y+b)y'''} \Longrightarrow [1+(y')^2]y''' - 3(y'')^2y' = 0$$

<u>واجب بيتي HOMEWORK</u>

كون المعادلات التفاضلية من العلاقات الاتية:

1) $y = aln(bx)$

2) $y = Acos2x + Bsin2x + 5x$

3) $y = c_1x + c_2x^3$

4) $y = ae^{bx}$

5) $y = Ae^x cos(3x + B)$

6) $y = Ax^2 + Bx + C$

7) $ye^x = ax^2 + bx + c$

المحاضرة الثانية

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولاً: المعادلات القابلة لفصل المتغيرات.

ثانيا: المعادلات من النوع المتجانس.

ثالثا: المعادلات ذات المعاملات الخطية.

رابعا:المعادلات التفاضلية التامة.

خامسا: المعادلات التفاضلية الخطية.

سادسا: معادلة برنولي.

أولاً: المعادلات القابلة لفصل المتغيرات Separable Equations

وهي المعادلة التي تكون من الشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

الدالة $f(x,y)$ **يجب أن تكون مستمرة بالنسبة للمتغير** x.

وتكون على عدة حالات:

1) **إذا كانت هذه المعادلة تابعة لــ** x **فقط:**

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x) \cdot dx$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$y = \int f(x) \cdot dx + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة.

2) **إذا كانت المعادلة تابعة لــ** y **فقط:**

$$y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dy = f(y) \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة.

3) إذا كانت المعادلة التفاضلية تابعة لـــ x و y قابلة لفصل المتغيرات تكتب بالشكل التالي:

$$y' = f(x, y) \Rightarrow f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$$

حيث f_1, f_2, g_1, g_2 دوال مستمرة ومعرفة بالنسبة لـــ x و y على أي مجال مغلق من $\mathbb{R}$.

نقسّم طرفي المعادلة على المقدار: $f_2(x) \cdot g_1(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن إيجاد الحل العام لها بفصل المتغيرات.

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

تسمى بالمعادلة التي تنفصل متغيراتها أو قابلة لفصل المتغيرات.

<u>ملاحظة هامة جداً:</u> عند حل المعادلة التفاضلية المعطاة في السؤال يجب وضعها بالصيغة القياسية للحالات الثلاث أعلاه.

<u>مثال 1:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x \frac{dy}{dx} = 1 + x$

<u>الحل:</u>

بقسمة طرفي المعادلة على x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + x}{x}$$

بقسمة الحدود البسط على الحد في المقام نجد أن

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + 1$$

الان بضرب طرفي المعادلة في dx ينتج لدينا

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على (لا تنسى إضافة ثابت التكامل لأنه تكامل غير محدد)

$$\Rightarrow \int dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx \Rightarrow y = \ln|x| + x + c$$

<u>مثال 2:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 y$

<u>الحل:</u>

بضرب طرفي المعادلة بالمقدار $\frac{dx}{y}$ لغرض فصل المتغيرات نحصل على

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2 dx$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\, dx \Rightarrow \ln|y| = x^3 + c \Rightarrow y = e^{x^3 + c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

<u>مثال 3:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1 - x)dy - (1 + y)dx = 0$.

<u>الحل:</u>

نقوم بفصل المتغيرات بقسمة المعادلة التفاضلية على المقدار $(1 + y)(1 - x)$ فنجد أن

$$\frac{(1 - x)}{(1 - x)(1 + y)} dy - \frac{(1 + y)}{(1 - x)(1 + y)} dx = 0$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على

$$\int \frac{dy}{1 + y} - \int \frac{dx}{1 - x} = 0 \Rightarrow \ln(1 + y) + \ln(1 - x) = c$$

باستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نبسط المقدار أعلاه

$$\ln[(1+y)(1-x)] = c$$

وبأخذ e **للطرفين ينتج**

$$e^{\ln[(1+y)(1-x)]} = e^{c} \Rightarrow (1+y)(1-x) = c_1 \quad (e^{c} = c_1)$$

وهو الحل العام للمعادلة.

ملاحظة: يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن فصل متغيراتها مباشرة ولكنها تؤول الى معادلات تفاضلية قابلة للفصل فمثلاً ان المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \quad ; a, b, c \text{ ثوابت}$$

هي معادلة تفاضلية لا يمكن فصل المتغيرات فيها مباشرة ولذلك نجري عليها التحويل الاتي:

أولاً نفرض أن

$$z = ax + by + c$$

ثم نفاضل (نشتق) الطرفين

$$\Rightarrow dz = a \cdot dx + b \cdot dy$$

نقسم الطرفين على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ **من المعادلة أعلاه فيكون**

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z)$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب

$$dx = \frac{dz}{b \cdot f(z) + a}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو

$$x = \int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} + c$$

<u>مثال:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = x + y + 1$

<u>الحل:</u>

نكتب المعادلة بالشكل

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

نلاحظ أنها غير قابلة لفصل المتغيرات مباشرة لذلك نفرض

$$z = x + y + 1$$

ثم نفاضل (نشتق) الطرفين

$$\Rightarrow dz = dx + dy$$

نقسم الطرفين على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الأساسية فيكون

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب

$$dx = \frac{dz}{1 + z}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x = \ln|1+z| + \ln c$$

بإرجاع قيمة z الى أصلها وهي $(z = x + y + 1)$

$$\Rightarrow x = \ln|x+y+2| + \ln c$$

وباستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نجد أن

$$\Rightarrow x = \ln[(x+y+2)c]$$

وبأخذ e للطرفين نجد أن

$$\Rightarrow e^x = e^{\ln[(x+y+2)c]} \Rightarrow c(x+y+2) = e^x \Rightarrow y = e^x - c(x+2)$$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$

2) $(y^2 + y)dx - (x^2 + x)dy = 0$

3) $\sin^2 x \, cosy \, dx + sinysecx \, dy = 0$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{yx}$

5) $x(1-y)\frac{dy}{dx} + y(1+x) = 0$

6) $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$

المحاضرة الثالثة

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولاً: المعادلات القابلة لفصل المتغيرات.

ثانيا: المعادلات من النوع المتجانس.

ثالثا: المعادلات ذات المعاملات الخطية.

رابعا:المعادلات التفاضلية التامة.

خامسا: المعادلات التفاضلية الخطية.

سادسا: معادلة برنولي.

ثانياً: المعادلات من النوع المتجانس او المتجانسة **Homogeneous Equations**

لتكن المعادلة التفاضلية التالية من الرتبة الأولى و الدرجة الاولى

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

حيث ان كلاً من M, N دوال.

تعريف: الدالة المتجانسة **Homogeneous Function**

يقال عن الدالة $f(x,y)$ التابعة للمتغيرين x و y بأنها متجانسة من الدرجة n إذا تحققت العلاقة

$$\boldsymbol{f(tx,ty) = t^n f(x,y)}$$

حيث $0 \neq t$ عدد حقيقي.

اذا كانت n=0 فان الدالة متجانسة من الدرجة صفر.

لمعرفة كون الدالة متجانسة أم لا يمكن اخراج t عامل مشترك بعد تبديل كل من (x,y) بـ (tx,ty) وتعود الدالة كما هي.

وكمثال على ذلك فالدالة $f(x,y) = x^3 - xy^2$ تكون متجانسة من الدرجة الثالثة لأن

$$\boldsymbol{f(tx,ty) = (tx)^3 - (tx)(ty)^2 = t^3(x^3 - xy^2) = t^3 f(x,y)}$$

أما الدالة $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \sin\left(\frac{2y}{x}\right)$ فهي متجانسة من الدرجة صفر لأننا عندما نعوض بدل كل x,y بـــ tx,ty ستختصر t وتحذف

اما الدالة $f(x,y) = x + \sin y$ فهي دالة غير متجانسة.

تعريف: المعادلة التفاضلية المتجانسة

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والتي على الصورة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بأنها متجانسة إذا كانت كلاً من M, N دالة متجانسة ومن نفس الدرجة.

خطوات حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

1- **نفرض** $y = vx$.

2- **نشتق (1) بالنسبة لـ x فنحصل على** $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

3- **نضرب المعادلة** $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ **بالمقدار** dx **فنحصل على** $dy = vdx + xdv$.

4- **نعوض قيمتي** y, dy **في المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة قابلة لفصل المتغيرات والتي من السهل استنتاج الحل لها كما درسنا في المحاضرة السابقة.**

5- **بعد إيجاد الحل نعوض بدل كل** v **بالقيمة** $\frac{y}{x}$ **ونبسط الناتج قدر الإمكان.**

<u>مثال:</u> حل المعادلة التفاضلية $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

<u>الحل:</u>

نختبر الدوال $N(x,y) = 2xydy$ و $M(x,y) = x^2 + y^2$

$$N(tx,ty) = 2txtydy = t^2 2xydy = t^2 N(x,y)$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

$$M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 M(x,y)$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

اذن الدوال متجانسة و من نفس الدرجة و عليه

نفرض $y = vx$ وباشتقاقها بالنسبة الى x نحصل على

$$dy = vdx + xdv$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الأصلية نجد أن

$$(x^2 + v^2x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$\Rightarrow x^2dx + v^2x^2dx - 2v^2x^2dx - 2vx^3dv = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة والبحث عن العوامل المشتركة ينتج

$$\Rightarrow x^2(1 - v^2)dx - 2vx^3dv = 0$$

بالقسمة على المقدار $(1 - v^2)x^3$ نحصل على

$$\frac{dx}{x} - \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0$$

بتكامل المقدار أعلاه نحصل على

$$\Rightarrow \ln x + \ln(1 - v^2) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln x(1 - v^2) = \ln c \Rightarrow x(1 - v^2) = c$$

وبإرجاع قيمة v لما يساويها وتعويضها أعلاه نجد أن

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow x - \frac{xy^2}{x^2} = c$$

بضرب المعادلة في x ينتج لدينا

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = cx$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

HOMEWORK

أولاً: حدد فيما إذا كانت الدوال التالية متجانسة أم لا؟ وإذا كانت متجانسة حدد درجة تجانسها

1) $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$

2) $f(x,y) = \tan\dfrac{2y}{x}$

3) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3xy}{x - 2y}$

5) $f(x,y) = 5y + \sqrt{x^2 + y^2}$

6) $f(x,y) = y^2\tan\dfrac{x}{y}$

ثانياً: أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية

1) $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x^2}{yx}$

المحاضرة الرابعة

تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية:

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هي:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \; .... (1)$$

و يمكن إيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بتحويلها الى معادلات من الرتبة الأولى كما في الحالات التالية:

1- اذا لم يظهر المتغير المعتمد y في المعادلة (1) نفرض

$$y' = p$$

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل

$$G(x, p, p') = 0$$

و هي معادلة من الرتبة الأولى في p و نحلها من اجل x و p ثم نحل المعادلة من اجل x, y بعد التعويض عن $p = \frac{dy}{dx}$.

مثال 1: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xy'' = y'$$

المعادلة خالية من المتغير المعتمد y

$\therefore$ **نفرض**

$$y' = p$$

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

نعوض في المعادلة المطلوب حلها نحصل على

$$xy'' = y'$$

$$xp' = p \Rightarrow x\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نحصل على

$$ln(p) = ln(x) + ln(c_1) \Rightarrow ln(p) = ln(xc_1) \Rightarrow p = xc_1$$

بالتعويض عن

$$y' = p$$

نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = xc_1 \Rightarrow \int dy = \int c_1 x dx \Rightarrow y = c_1\frac{x^2}{2} + c_2$$

مثال 2 :حل المعادلة التفاضلية التالية : .

$$x^2y'' - y'^2 - 2xy' = 0$$

H.w

2- اذا لم يظهر المتغير المستقل x في المعادلة (1) نفرض

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dy} * \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل

$$E\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

و هي معادلة من الرتبة الأولى في متغير مستقل y و متغير معتمد p ثم نحل المعادلة من اجل x, y بعد التعويض عن $p = \frac{dy}{dx}$.

مثال 1 حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

∴ نفرض

$$y' = p$$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

نعوض في المعادلة المطلوب حلها نحصل على

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

$$p.\left(y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0 \Rightarrow$$

اما

$p = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c$ حل منفرد

او

$$\left(y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0$$

$$y\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dy}{y} = 0$$

بتكامل الطرفين نحصل على

$$ln(p) + ln(y) = ln(c_1) \Rightarrow ln(py) = ln(c_1) \Rightarrow py = c_1 \Rightarrow p = \frac{c_1}{y}$$

بالتعويض عن $p = \frac{dy}{dx}$

نحصل على

$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \Rightarrow \int y dy = \int c_1 dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$ **حل عام**

مثال 2 : حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$yy'' + (y')^3 = 0$$

H.W

ملاحظة 1 : بالنسبة للمعادلات التفاضلية التي لا يظهر فيها المتغيرات x,y من الأفضل حلها حسب الحالة الأولى أي انه باعتبار عدم ظهور المتغير y .

ملاحظة 2 : يمكن حل بعض المعادلات التفاضلية الخاصة و برتب اعلى من الرتبة الثانية و ذلك بفرض:

$$y'' = q$$

$$y''' = q'$$

مثال 1 : حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xy''' - 2y'' = 0$$

∴ نفرض

$$y'' = q$$

$$y''' = q'$$

نعوض في المعادلة المطلوب حلها نحصل على

$$xq' - 2q = 0 \Rightarrow x\frac{dq}{dx} - 2q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} - 2\frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow ln(q) - 2ln(x) = ln(c_1) \Rightarrow$$

$$ln(q) = ln(c_1) + ln(x^2)$$

$$\Rightarrow ln(q) = ln(c_1x^2) \Rightarrow q = c_1x^2$$

بما انه

$$y'' = q$$

نحصل على

$$y'' = c_1x^2$$

يمكن حلها كتالي:

$$\int y'' = \int c_1x^2 \Rightarrow y' = \frac{c_1}{3}x^3 + c_2$$

$$\Rightarrow \int y' = \int \left(\frac{c_1}{3}x^3 + c_2\right) \Rightarrow y = \frac{c_1}{12}x^4 + c_2\,x + c_3$$

او نعتبرها من الحالة الأولى أي انه لا يظهر المتغير y نفرض

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = c_1 x^2 \Rightarrow$$

$$\int dp = \int c_1 x^2 dx \Rightarrow p = \frac{c_1}{3} x^3 + c_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{3} x^3 + c_2$$

$$\int dy = \int (\frac{c_1}{3} x^3 + c_2) dx \Rightarrow y = \frac{c_1}{12} x^4 + c_2\, x + c_3$$

مثال 2: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''' - y'' = 0$$

H.W

المحاضرة الخامسة

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

1- الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتبة n هي:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \dots\dots\dots a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \quad \dots(1)$$

اذا كانت الدالة $f(x) \neq 0$ فان المعادلة التفاضلية (1) تسمى معادلة تفاضلية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة.

اما اذا كانت $f(x) = 0$ فان المعادلة التفاضلية (1) تسمى معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة و تكون بالصيغة التالية:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \dots\dots\dots a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad \dots(2)$$

مبرهنة (1):

اذا كانت الدوال $y_1, y_2, \dots . y_n$ هي حلول للمعادلة (2) و كانت $c_1, c_2, \dots . c_n$ ثوابت فان

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 +, \dots . + c_n y_n$$

هو حل للمعادلة المتجانسة (2).

2- الدوال المستقلة خطيا و الدوال المرتبطة خطيا.

يقال للدوال $y_1, y_2, \dots . y_n$ انها مرتبطة خطيا في الفترة I اذا وجدت ثوابت $c_1, c_2, \dots . c_n$ ليست جميعها تساوي صفربحيث ان:

$$c_1 y_1 + c_2 y_{2+}, \dots . c_n y_n = 0$$

يقال للدوال $y_1, y_2, \dots . y_n$ انها مستقلة خطيا في الفترة I اذا وجدت ثوابت $c_1, c_2, \dots . c_n$ بحيث ان اذا كانت:

$$c_1 y_1 + c_2 y_{2+}, \dots . c_n y_n = 0$$

فان $c_1 = c_2 = \dots . = c_n = 0$

و يمكن استخدام محدد فروسكي للتميز بين الدوال الستقلة خطيا و المرتبطة خطيا بالاعتماد على المبرهنيتن (2) و (3):

محدد فرونسكي:

يعرف محدد فرونسكي ل n من الدوال $y_1, y_2, \ldots . y_n$ القابلة للاشتقاق من الرتبة (n-1) في الفترة المفتوحة I بالشكل التالي:

$$W(y_1, y_2, \ldots . y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots\cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 \cdots\cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 \cdots\cdots & y''_n \\ . & . & . \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال على ذلك محدد مفرونسكي للداتين y_1, y_2 هو

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

مبرهنة (2)

اذا كانت $y_1, y_2, \ldots . y_n$ حلولا للمعادلة المتجانسة (2) فان الشرط الضروري و الكافي لتكون الدوال $y_1, y_2, \ldots . y_n$ مرتبطة خطيا في الفترة المفتوحة I هو

$$W(y_1, y_2, \ldots . y_n) = 0$$

مبرهنة (3)

اذا كانت $y_1, y_2, \ldots . y_n$ حلولا للمعادلة المتجانسة (2) فان الشرط الضروري و الكافي لتكون الدوال $y_1, y_2, \ldots . y_n$ مستقلة خطيا في الفترة المفتوحة I هو

$$W(y_1, y_2, \ldots . y_n) \neq 0$$

المعادلات التفاضلية الخطية (المتجانسة وغير المتجانسة) من الرتب العليا

تكون المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بالصورة

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \dots\dots (1)$$

حيث a_0, a_1, a_{n-1}, a_n ثوابت و $a_0 \neq 0$ واذا كانت $f(x) = 0$ فأن المعادلة التفاضلية تسمى حينها **بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة**.

وكمثال على ذلك فالمعادلة $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثالثة لان الطرف الأيمن فيها يساوي صفر اما المعادلة $y'' + 9y = x \cos x$ فهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة لان الطرف الأيمن فيها لا يساوي صفر.

المؤثر D

يعرف المؤثر D بانه المشتقة الأولى بالنسبة الى المتغير x والتي تكون بالشكل $\frac{d}{dx}$ أي ان

$$D = \frac{d}{dx} \quad , D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \quad , D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

وعليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

مثال: لو أعدنا كتابة المعادلة $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ بدلالة المؤثر فإنها ستكون بالشكل

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4) y = 0$$

ملاحظة: عند حل المعادلة (1) فان الحل سيتكون من جزئين الجزء الأول هو حل المعادلة المتجانسة وهو ما يعرف بالحل العام او الدالة المتممة y_c اما الجزء الثاني فهو حل المعادلة غير المتجانسة وهو ما يعرف بالحل الخاص y_p وعليه يكون الحل بالصيغة

$$y = y_c + y_p$$

وسوف ندرس الان الحل العام او الدالة المتممة للجزء المتجانس من المعادلة (1) فنعيد كتابة المعادلة بالصيغة

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_{n-1})(D - m_n) = 0 \dots (2)$$

وهي ما تعرف بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) والجذور $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ تسمى الجذور المميزة ويمكن كتابتها بصيغة أخرى على اعتبار ان كل $D = m$ ولتوضيح ذلك ناخذ المعادلة

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0 \Longrightarrow (D^3 - 2D^2 - 4D + 8)y = 0$$

فالمعادلة المميزة تكتب بالشكل

$$m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0$$

ويمكن حل هذه المعادلة بطرق تحليل الجذور مثل التحليل بالتجربة او الدستور او تجزئة الحدود حسب المعادلة التي لدينا وهناك طريقة أخرى.

هناك ثلاث حالات لجذور المعادلة (2) وهي:

اولاً: الجذور حقيقية مختلفة أي ان $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \cdots \neq m_{n-1} \neq m_n$ عندئذ تكون الدالة المتممة بالشكل

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2} x + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

واجب بيتي

1- جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $4y'' + y' = 0$

2) $y'' - 36y = 0$

5) $y'' + 8y' + 16y = 0$

6) $y'' - 10y' - 2y = 0$

13) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

14) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

15) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

16) $16y^{(4)} + 24y'' + 9y = 0$

2- حل مسائل القيم التالية:

1) $4y'' - 4y' - 3y = 0, \qquad y(1) = 0\,, y'(0) = 2$

2) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 1$