Partial differential equations
المعادلات التفاضلية الجزئية

قسم الرياضيات – المرحلة الثالثة

د. جنيد ادريس مصطفى

أ. ايمان هاشم نجم

المحاضرة الاولى
بعض المفاهيم الاساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية

- **المعادلة التفاضلية الجزئيةPDE:** وهي معادلة تتضمن دالة مجهولة (تدعى المتغير المعتمد) والمشتقات الجزئية لهذه الدالة، الدالة المجهولة تكون ذات متغيرين او اكثر(تدعى بالمتغيرات المستقلة) والمشتقات الجزئية تكون بالنسبة الى بعض تلك المتغيرات المستقلة او كلها.

مثال1: المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$U_t = U_{xx} \qquad (1)$$

وتدعى بمعادلة الحرارة ذات البعد الواحد حيث يكون المتغيرالمعتمد (U) والمتغيرات المستقلة x,t ويمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{or} \quad D_t U = D_{xx}^2 U$$

مثال2: المعادلة التفاضلية الاعتيادية التالية:

$$\frac{d^2y(x)}{dx} + \frac{dy(x)}{dx} = 2 \qquad (2)$$

المتغير المعتمد هو y والمتغير المستقل هو x ويمكن كتابة المعادلة (2) بالشكل التالي

$$y'' + y' = 2$$

- **رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية Order of PDE: هي رتبة اعلى مشتقة جزئية تظهر في المعادلة التفاضلية.**
- **درجة المعادلة التفاضلية الجزئية Degree of PDE: هي اس اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية بشرط ان يكون ذلك عددا صحيحا غي سالبا.**
- **عدد المتغيرات: هو عدد المتغيرات المستقلة التي تعتمد عليها الدالة المجهولة.**
- **المعادلة التفاضلية الجزئية: تسمى خطية اذا كانت الدالة المجهولة (المتغير المعتمد) ومشتقاتها الجزئية:**
  - **غير مضروبة مع بعضها البعض.**
  - **من الدرجة الاولى.**

- **المعادلة التفاضلية الجزئية:** تسمى غير خطية اذا كانت الدالة المجهولة (المتغير المعتمد) ومشتقاتها الجزئية:
  - مضروبة مع بعضها البعض.
  - ليست من الدرجة الاولى.
- **المعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة:** اذا كانت من الرتبة الثانية وذات المتغيرين المستقلين x,y والمتغير Z معرفة بالصيغة العامة التالية:

$$Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_{x} + Ez_{y} + Gz = F(x, y) \qquad (3)$$

حيث المعاملات A,B,C,D,E,G,F تكون اما ثوابت او دوال بدلالة x,y .

1) تسمى المعادلة (3) **متجانسة** اذا كانت $F(x,y) = 0$. 3) تسمى المعادلة (3) **ذات معاملات ثابتة** اذا كانت المعملات ثوابت.

2) تسمى المعادلة (3) **ذات معاملات متغيرة** اذا كانت المعاملات دوال. 4) تسمى المعادلة (3) **غير متجانسة** اذا كانت $F(x,y) \neq 0$.

مثال3: صنف المعادلة التفاضلية التالية: معادلة الحرارة ذات البعد الواحد

$$U_t = U_{xx} \qquad (3)$$

1. الرتبة الثانية.
2. الدرجة الاولى.
3. معادلة تفاضلية جزئية خطية.
4. عدد المتغيرات المستقلة 2.
5. معادلة تفاضلية جزئية متجانسة.

مثال4: صنف المعادلة التفاضلية التالية: معادلة الحرارة ذات البعد الواحد

$$U_{xx} + 3U_{xy} + U_{yy} = \cos(x) \qquad (3)$$

1. الرتبة الثانية.
2. الدرجة الاولى.
3. معادلة تفاضلية جزئية خطية.
4. عدد المتغيرات المستقلة 2.
5. معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة.
6. معادلة ذات معاملات ثابتة.

حل المعادلات التفاضلية الجزئية

- **الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية: هو اي علاقة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة للمعادلة التفاضلية الجزئية وتكون هذه العلاقة خالية من المشتقات وتحقق المعادلة. يحتوي الحل على عدد من الدوال الاختيارية بقدر رتبة المعادلة وهذا ما يسمى الحل العام General solution. اما الحل التام فهو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية arbitrary constants.**
- **الدالة الاختيارية: هي مقدار غير محدد تستخدم في حلول المسائل (المعادلات) ويمكن ان يعطي لها اي قيمة او صيغة لاكمال متطلبات الحل.**

مثال5: اثبت ان معادلة (4) هي حل للمعادلة التفاضلية الجزئية (5)

$$z = y^2 f(x) - 3x + 4y \qquad (4)$$

$$\frac{y\partial z}{\partial y} - 2z = 6x - 4y \qquad (5)$$

حيث $f(x)$ دالة اختيارية.

خطوات الحل

- **1- نشتق z بالنسبة ل y نحصل على:**

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf(x) + 4 \qquad (6)$$

- **2- الان لكي نحصل على الحد الاول في المعادلة الجزئية في السؤال نضرب طرفي المعادلة (6) ب y نحصل على**

$$\frac{y\partial z}{\partial y} = 2y^2 f(x) + 4y \qquad (7)$$

- **3- نعوض معادلة (4) و(7) في معادلة (5)**

$$2y^2 f(x) + 4y - 2(y^2 f(x) - 3x + 4y) \stackrel{?}{=} 6x - 4y$$

بعد التبسيط والاختصار نجد ان الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر. هذا يعني ان معادلة (4) هي حل للمعادلة (5).

المحاضرة الثانية
ايجاد تكوين للمعادلات التفاضلية الجزئية Formation of PDE

ايجاد تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية بواسطة: حذف الثوابت والدوال الاختيارية. نفرض الحل بالصيغة التالية:

$$g(x,y,z,a,b)=0 \qquad (1)$$

نشتق العلاقة (1) جزئيا بالنسبة لـ x مرة نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}.p=0 \qquad (2)$$

ومرة اخرى بالنسبة ل y نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}.q=0 \qquad (3)$$

حيث

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \;, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} \;, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

also some times we need this relation $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial p}{\partial y}$

ويمكن حذف الثوابت الاختيارية من العلاقة (2) و(3) و (4) لنحصل على معادلة تفاضلية جزئية من الرتب الاولى وبالصيغة التالية

$$g(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (4)$$

هنالك ثلاث حالات للعلاقة (1)

❑ اذا كان عدد الثوابت الاختيارية اقل من عدد المتغيرات المستقلة فان حذف الثوابت ينتج عنه **معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الاولى** (المعادلات الناتجة تمثل الصيغة (4)).

مثال1: اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية بحذف الثابت الاختياري $\boldsymbol{a}$ من العلاقة التالية

$$z = ax + y \qquad (5)$$

حيث x,y متغيرات مستقلة.

الحل: نشتق (5) بالنسبة ل x,y لنحصل على

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \qquad (6) \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \qquad (7)$$

نعوض (6) في (5) لنحصل على

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y \qquad (8)$$

وبالتالي حصلنا على معادلتين جزئيتين (7) و (8) وهي خالية من الثوابت الاختيارية.

- الحالة الثانية: اذا كانت عدد الثوابت الاختيارية مساويا الى عدد المتغيرات المستقلة، فان حذف الثوابت ينتج عنه **معادلة تفاضلية جزئية وحيدة من الرتبة الاولى.**

مثال2: اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية بحذف الثوابت الاختيارية a,b من العلاقة التالية

$$z = axy + b \qquad (9)$$

الحل: نشتق (9) بالنسبة ل x,y لنحصل على

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = ay \qquad (10) \qquad\qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = ax \qquad (11)$$

من (10) و(11) نحصل على

$$a = \frac{p}{y} \quad , \quad a = \frac{q}{x} \quad , \quad \frac{p}{y} = \frac{q}{x} \quad , \quad px - qy = 0 \qquad (12)$$

وبالتالي حصلنا على معادلة تفاضلية جزئية (12) خالية من الثوابت الاختيارية a,b.

❑ الحالة الثالثة: : اذا كانت عدد الثوابت الاختيارية اكثر من عدد المتغيرات المستقلة فان حذف الثوابت الاختيارية ينتج عنه معادلة تفاضلية جزئية(او اكثر) من الرتب العليا، حيث نلجا الى استخدام المشتقات العليا لايجاد المعادلة التفاضلية الجزئية.

مثال3: اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية بحذف الثوابت الاختيارية a,b,c من العلاقة التالية

$$z = ax + by + cxy \qquad (10)$$

الحل: : نشتق (10) بالنسبة ل x,y لنحصل على

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a + cy \qquad (11) \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = b + cx \qquad (12) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = c \qquad (15)$$

بعد التبسيط نعوض المعادلات (11) و(12) و(15) في (10) لنحصل على معادلة تفاضلية جزئية خالية من الثوابت الاختيارية

$$z = px + qy - sxy \qquad (16)$$

تعتبر معادلة (16) من الرتبة الثانية لان $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

المحاضرة الثالثة
حذف الدوال الاختيارية للمعادلات التفاضلية الجزئية
The elimination of arbitrary functions

يمكننا ايجاد تشكيل للمعادلة التفاضلية الجزئية من الحل العام والتي تحتوي على دوال اختيارية وذلك بحذف الدوال الاختيارية.

وهنالك حالتان:

- الحالة الاولى: اذا كان الحل (الدالة المعطاة) يحتوي على n من الدوال الاختيارية ذات الصيغة $\varphi(u)$ حيث $u = u(x,y$ نتبع مايلي:

- نشتق الدالة جزئيا n من المرات على عدد الدوال الاختيارية الموجودة في الدالة بالنسبة ل x,y .
- نحذف الدوال الاختيارية ومشتقاتها من العلاقة الناتجة من النقطة اعلاه.

بعد ذلك نحصل على معادلة تفاضلية جزئية ذات الرتبة n والخالية من الدوال الاختيارية.

مثال1: جد المعادلة التفاضلية الجزئية التي حلها

$$z = \varphi(x+y) \qquad (1)$$

تعتبر (1) دالة اختيارية من متغيرين x,y.

<u>الحل:</u>

$$\boldsymbol{Let\ u = x + y, \qquad z = \varphi(u)}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}} \qquad (3)$$

بما ان المتغيرات المستقلة $\boldsymbol{x,y}$ تعتمد على نفسها فقط فان $\boldsymbol{0 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x}}$ وبالتالي معادلة (2) و(3) تصبح:

$$\boldsymbol{p = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial u}} \qquad (4)$$

ومن (4) نستنتج :

$$p = q \;\; \rightarrow p - q = 0 \qquad\qquad (5)$$

حيث معادلة (5) تعتبر معادلة تفاضلية جزئية خالية من الدوال الاختيارية.

❑ الحالة الثانية: اذا كان الحل (الدالة) المعطى في السؤال يتمثل بالصيغة التالية:

$$\varphi(u, v) = 0 \qquad\qquad (6)$$

حيث φ هي دالة اختيارية وان : $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ و يعتبر كل من x,y متغيران مستقلان و z هو المتغير المعتمد. فيمكننا ان نجد المعادلة التفاضلية الجزئية بحذف الدالة الاختيارية φ باستخدام المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + + \frac{\partial u}{\partial z}p & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + + \frac{\partial u}{\partial z}q & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (7)$$

مثال1: جد المعادلة التفاضلية الجزئية بحذف الدالة الاختيارية من الحل العام التالي:

$$\varphi\left(x^2-y^2, \qquad y^2+\frac{1}{2}z^2\right)=0 \qquad (8)$$

الحل:

$$Let\ u=x^2-y^2 \qquad , \qquad v= \ y^2+\frac{1}{2}z^2$$

$$u_x=2x \qquad u_y=-2y \qquad u_z=0 \qquad v_x=0 \quad v_y=2y \qquad v_z=z$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + + \frac{\partial u}{\partial z} p & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + + \frac{\partial u}{\partial z} q & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + 0 & 0 + zp \\ -2y + 0 & 2y + zq \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

نجد قيمة المحدد:

$$2x(2y + zq) + 2yzp = 0 \qquad \Rightarrow \qquad xy + xzq + yzp = 0 \qquad (10)$$

تعتبر المعادلة (10) معادلة تفاضلية جزئية خالية من الدوال الاختيارية.

المحاضرة الرابعة
معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية

معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية: هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الاولى وتكون خطية على الاقل في المشتقات الجزئية وليس بالضرورة خطية في المتغير المعتمد، وتكتب معادلة لاكرانج التنفاضلية الجزئية بالصيغة التالية:

$$\mathcal{P}(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_x = R(x,y,z) \qquad (7)$$

حيث $\mathcal{P}, Q , R$ هي دوال في المتغير المعتمد (z) والمتغيرات المستقلة y , x و $z(x,y) = z$.

طريقة لاكرانج: وهي طريقة لحل معادلة لاكرانج التفاضلية (7) ويتم فيها تحويل معادلة (7) الى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين بحيث يسهل حلها والتعامل معها، وبحلها سوف نحصل على الحل العام لمعادلة (7).

الخطوات الاساسية لحل معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية:

1. نكتب معادلتي لاكرانج المساعدة (التابعتين) من المعادلة التفاضلية الجزئية (المراد حلها) وكما يلي:

$$\frac{dx}{\mathcal{P}} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

2. نجد حلين مستقلين لمعادلات لاكرانج المساعدة ويتمثلان بالصيغ التالية:

$$u = u(x, y, z) = a, \qquad v = v(x, y, z) = b$$

حيث a , b ثوابت اختيارية واحدهم على الاقل يحوي z .

3. نكتب الحل العام لمعادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية (معادلة (7)) وذلك باستخدام الحلين المستقلين اعلاه وتعويضهم بالصيغة التالية:

$$\phi(u, v) = 0$$

حيث ϕ هي دالة اختيارية، ايضا بالامكان كتابة الحل العام كما في الصيغ التالية:

$$u = \phi(v) \;\; or \;\; v = \phi(u)$$

ملاحظة: استخدم $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$.

مثال1: استخدم طريقة لاكرانج لحل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xp + yq = 2z$$

الحل:

$$\because \mathcal{P} = x, \qquad Q = y, \qquad R = 2z$$

$$\because \frac{dx}{\mathcal{P}} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \qquad \therefore \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2y},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow Ln(x) = Ln(y) + Ln(a) \Rightarrow Ln\left(\frac{x}{y}\right) = Ln(a) \Rightarrow \frac{x}{y} = a, \qquad a = u(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2x} \Rightarrow 2Ln(y) = Ln(z) + Ln(b) \Rightarrow Ln\left(\frac{y^2}{z}\right) = Ln(b) \Rightarrow \frac{y^2}{z} = b, \qquad b = v(x, y, z)$$

نستنتج من قيم a,b (المستخرجة اعلاه) الحل العام الذي يمكن كتابته بالصورة التالية:

$$\therefore \phi(a,b)=\phi(u,v)=0,$$

حيث ϕ هي دالة اختيارية، اذن الحل العام لمعادلة السوال هو:

$$\mathrm{z}=\frac{1}{y^2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{او} \quad \phi\left(\frac{x}{y},\frac{y^2}{z}\right)=0$$

المحاضرة الخامسة
بعض الاساليب لحل معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية

اذا كانت لدينا معادلات لاكرانج المساعدة والمعطاة بالصيغة التالية

$$\frac{dx}{\mathcal{P}} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (1)$$

فانه بالامكان استخدام خصائص الكسور التالية للحصول على حل المعادلة (1):

- ❑ اولا: اذا كان (2) متوفرة سوف نحصل على (3)

$$A\mathcal{P} + BQ + CR = 0 \qquad (2)$$

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \qquad (3)$$

حيث A,B,C ثوابت او متغيرات بالنسبة ل x,y,z وقد تاخذ الاشارة **+** او **–** وهذا يعتمد على ما يتطلبه اسلوب حل المعادلة(1).

❑ثانيا: يمكن استحدام الخاصية التالية:

$$\frac{\boldsymbol{Adx + Bdy + Cdz}}{\boldsymbol{A\mathcal{P} + BQ + CR}} = \boldsymbol{Eq(1)} \qquad (4)$$

في هذه الخاصية يمكن استخدام احدى النسب في (1) في معادلة (4) وهذا مايتطلبه اسلوب حل المعادلة (1).

❑ ثالثا: نسبة مجموع اي بسطي في المعادلة (1) الى مجموع مقاميهما يساوي النسبة الثالثة.

مثلا:

$$\frac{\boldsymbol{Adx + Bdy}}{\boldsymbol{A\mathcal{P} + BQ}} = \frac{\boldsymbol{Cdz}}{\boldsymbol{CR}} \qquad (5)$$

ويمكن ايجاد علاقات اخرى مماثلة لـ (5).

مثال1: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xzp - yzq = y^2 - x^2 \qquad (6)$$

الحل: معادلة (6) تعتبر معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية، في هذه الحالة يمكن استخدام معادلة لاكرانج المساعدة:

$$\frac{dx}{\mathcal{P}} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \Rightarrow \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{y^2 - x^2} \qquad (7)$$

❖ اولا: لايجاد $u(x,y,z) = a$ ناخذ التسبة الاولى والثانية

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$$

$$Ln(x) = -Ln(y) + Ln(a)$$

$$Ln(x) + Ln(y) = Ln(a)$$

$$Ln(xy) = Ln(a) \Rightarrow xy = a$$