3- Linear Differential Equations

المعادلات التفاضلية الخطية

A differential equation of the form

المعادلات التي تكون من المرتبة الاولى والدرجة الاولى وتكون صيغتها النهائية بالشكل التالي:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1)}$$

Is called linear differential equation, where P and Q are a function of x (but not of y) or constants. In such case, multiply both side of (1) by ($e^{\int P\,dx}$)

حيث ان كل من P و Q هي دالة ل x فقط وليس ل y أو تكون ثابت و يجب توفر الشروط التالية لكي تكون المعادلة التفاضلية خطية:

1. ان تكون المشتقة من المرتبة الاولى و الدرجة الاولى.
2. ان تكون y مرفوعة للاس 1.
3. ان لا تكون Q أو dy/dx أو Py مضروبة بأي مشتقة اخرى أو في y.

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Example

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^2$$

معادلة تفاضلية خطية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xp = 10$$

ليست معادلة تفاضلية خطية لان المشتقة مرفوعة للاس 2

$$\frac{dy}{dx} + y = xy$$

ليست معادلة تفاضلية خطية لان Q مضروبة ب y

$$\frac{dy}{dx} + x\,y^2 = \sin x$$

ليست معادلة تفاضلية خطية لان y^2 وليس y

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

ولحل المعادلات التفاضلية الخطية يضرب طرفي المعادلة (1) بما يسمى بمعامل التكامل Integration Factor

$$\boxed{\boldsymbol{Integration\ Factor\ (I.F.) = e^{\int P\,dx}}}$$

Equation (1) will became

$$e^{\int P dx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Q\, e^{\int P\,dx} \quad \text{.........................(2)}$$

The left hand side of (2) is

$$\frac{d}{dx}\left[y\,.\,e^{\int P\,dx}\right] \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{d}{dx}\left[y\,.\,e^{\int P\,dx}\right] = Q.\, e^{\int P\,dx}$$

Integrating both sides

$$y\,.\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,.\,e^{\int P\,dx}\,.\,dx + c$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

اي ان الحل النهائي يكون بالشكل التالي:

$$y\,.(I.F.) = \int Q\,.\,(I.F.)\,.dx + c$$

or

$$x\,.(I.F.) = \int Q\,.\,(I.F.)\,.dy + c$$

اي ان المعادلة التفاضلية في الحالة الاخيرة تكون:

$$\frac{dx}{dy} + Px = Q$$

حيث ان كل من P و Q هي دالة ل y

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Example 12:

Solve the equation $x\,\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$

Solution:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}.y = x$$

$$y\,.(I.F.) = \int Q\,.(I.F.)\,.dx + c$$

$$I.F. = e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{-3}{x}\,dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3}$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

$$y \cdot \frac{1}{x^3} = \int x \cdot \frac{1}{x^3} \cdot dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = \int \frac{1}{x^2} \cdot dx + c = \int x^{-2} \cdot dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = \frac{-1}{x} + c \qquad \rightarrow \qquad y = -x^2 + c\,x^3$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Example 13:

Solve the equation $\frac{dy}{dx} + 2y\,tanx = sinx$

Solution:

$$I.F. = e^{2\int tanx\,dx} = e^{2\ln sec\,x} = e^{\ln sec^2 x} = sec^2 x$$

$$y\,.\,sec^2 x = \int sec^2 x\,.\,sinx\,.\,dx + c = \int \frac{1}{cos^2 x}\,.\,sinx\,.\,dx + c$$

$$= \int \frac{1}{cosx}\,.\,\frac{sinx}{cosx}\,.\,dx + c = \int secx\,.\,tanx\,.\,dx + c$$

$$y\,.\,sec^2 x = secx + c$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

4- Exact Differential Equation المعادلات التفاضلية التامة

An exact differential equation is formed by directly differentiating its primitive (solution) without any process

تكتب المعادلات التفاضلية التامة بالصيغة التالية:

$$\boxed{M\,dx + N\,dy = 0}$$

Is said to be an exact differential equation if it satisfies the following condition

$$\boxed{\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}}$$

Where $\frac{\partial M}{\partial y}$ denotes the differential co-efficient of M with respect to y keeping x constant. And $\frac{\partial N}{\partial x}$, the differential coefficient of N with respect to x, keeping y constant.

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Methods for Solving Exact Differential Equation

Method for Solving Exact Differential Equation:

Step I . Integrate M with respect to x, keeping y constant.

تكامل M نسبة الى x باعتبار y ثابت.

Step II. Integrate with respect to y, only those term of N which do not contain x

تكامل نسبة ل y فقط للحدود الموجودة ضمن N دون التي تحتوي على x (اي اهمال اي حد لx مضروب في y).

Step III. Result of I + Result of II = Constant

الحل النهائي يساوي الحل الاول + الحل الثاني = ثابت

أو

1. تكامل N نسبة الى y باعتبار x ثابت
2. تكامل نسبة ل x فقط للحدود الموجودة ضمن M دون التي تحتوي على y (اي اهمال اي حد لy مضروب في x)
3. الحل النهائي يساوي الحل الاول + الحل الثاني = ثابت

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Example 14:

Solve the equation $(5\,x^4 + 3\,x^2\,y^2 - 2\,x\,y^3)\,dx + (2\,x^3 y - 3\,x^2\,y^2 - 5\,y^4)\,dy = 0$

Solution:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

$$M = 5\,x^4 + 3\,x^2\,y^2 - 2\,x\,y^3$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 6\,x^2\,y - 6\,x\,y^2$$

$$N = 2\,x^3\,y - 3\,x^2\,y^2 - 5\,y^4$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = 6\,x^2\,y - 6\,x\,y^2$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Since $\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$ $\qquad E.D.E$

$$\int M \ dx + \int (terms\ of\ N\ not\ constaining\ x)\ dy = c$$

(y constant)

$$\int (5\,x^4 + 3\,x^2\,y^2 - 2\,x\,y^3)\ dx + \int -5\,y^4\ \ dy = c$$

$$x^5 + \ x^3\,y^2 - \ x^2\,y^3 - \ y^5 = c$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Example 15:

Solve the equation $\left(y^2 e^{xy^2} + 4\,x^3\right) dx + \left(2\,xye^{xy^2} - 3\,y^2\right) dy = 0$

Solution:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

$$M = y^2 e^{xy^2} + 4\,x^3$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = y^2\left(e^{x\,y^2}\right) 2\,x\,y + 2\,y\,e^{xy^2} = 2\,x\,y^3\,e^{x\,y^2} + 2\,y\,e^{x\,y^2}$$

$$N = 2\,xye^{xy^2} - 3\,y^2$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = 2\,y\,x\,e^{x\,y^2}\,y^2 + e^{x\,y^2}\,2y = 2\,x\,y^3\,e^{x\,y^2} + 2\,y\,e^{x\,y^2}$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} \qquad E.D.E$$

$$\int M \ dx + \int (terms\ of\ N\ not\ constaining\ x) \ dy = c$$

$$\int \left(y^2 e^{xy^2} + 4\,x^3\right) dx + \int -3\,y^2 \ \ dy = c$$

$$e^{x\,y^2} + x^4 - \ y^3 = c$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

Example 16:

Solve the equation $(2xy + y - tany)\,dx + \left(x^2 - x\,tan^2y + sec^2y + 2\right) dy = 0$

Solution:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

$$M = 2xy + y - tany$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 2x + 1 - sec^2y$$

$$N = x^2 - x\,tan^2y + sec^2y + 2$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = 2x - tan^2y = 2x - \left(sec^2y - 1\right) = 2x - sec^2y + 1$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} \qquad E.D.E$$

$$\int M\ dx + \int (terms\ of\ N\ not\ constaining\ x)\ dy = c$$

$$\int (\,2xy + y - tany)\ dx + \int \left(sec^2 y + 2\right)\ dy = c$$

$$x^2\ y + x\ y - x\ tany + tany + 2y = c$$

Email: iibrahim@uomosul.edu.iq