الفصل الأول

الأخطاء

(1-1)مقدمة

هنالك مسائل عددية يمكن إيجاد الحلول المضبوطة لها بسهولة كما في المعادلة الآتية :-

$X^2+2x+1=0$

فتحل هكذا نوع أما بالدستور أو بالتحليل ، ولكن في الغالب ليس من السهل إيجاد الحلول المضبوطة للعدد من المسائل في المعادلات الجبرية ذات القوى الغير الصحيحة أو بعض المعادلات الغير الخطية مثل $x=\sin^2 x$ أو إيجاد قيمة التكامل للدوال المثلثية أو المثلثية العكسية والى أخره من الدوال التي يصعب إيجاد الحلول الرياضية لها.

وفي حياتنا العملية ليس من الضرورة اعتماد القيم المضبوطة دائما لحل المسائل الرياضية والهندسية حيث يمكن الاستفادة من القيم التقريبية لتلك المسائل لذلك فان الوسائل المستخدمة للإيجاد الحلول التقريبية تسمى (الخوارزمية).

لقد استخدمه كلمة خوارزمية في البداية للتعبير عن مجموعة من العمليات (الخطوات) التي تودي إلى الحل للعدد المنتهي من الخطوات وهذا النوع من الخوارزميات يسمى (الخوارزميات المنتهية).

تعاريف توضيحية

- **التحليل العددي:-** إن الموضوع المتعلق بدراسة الطرق المستخدمة لإيجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة بها تسمى التحليل العددي.

- **الحلول العددية:-** إن معظم الخوارزميات المصممة لحل مسائل معينة تسمح لنا لإيجاد الحل بأي دقة مطلوبة باستخدام عدد محدد من الخطوات لان دائما هذه الحلول تسمى بالحلول العددية.

- **الخوارزمية:-** بأنها مجموعة من التوجيهات للتنفيذ عمليات حسابية مهمة بشكل يودي إلى حل المسالة المعطى.

(2-1)أنواع الأخطاء

- **أخطاء الصياغة :-** عندما يراد تحليل مشكلة معينة بطريقة رياضية غالبا ما نأخذ نموذجا مبسطا يصف المشكلة الأساسية أي قد نهمل بعض العوامل والمؤثرات إذا رأينا أنها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا يوثر على المظهر الأساسي للمشكلة. إن النتائج التي نحصل عليها من النموذج المبسط هذا تكون عادة محملة بأخطاء تسمى(بأخطاء الصياغة).

- **أخطاء البتر:-** عندما تكون لدينا دالة معينة معرفة على شكل متسلسلة غير منتهية فان قيمة الدالة لا يمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة بل نتوقف بعد حساب عدد محدد من الحدود، هذا التوقف يسبب خطا في قيمة الدالة يسمى بخطاء البتر لأنه يتم بتر سلسلة من العمليات الرياضية غير المنتهية.

- **أخطاء التراكمية:-** بعض الطرق العددية مثل الحلول العددية للمعادلات التفاضلية تتضمن تكرار مجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة فان الخطأ في كل خطوة يزداد بالاعتماد على استخدام القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة مما ينتج عنه خطاء يسمى (بالخطأ التراكمي).

- **أخطاء الصلبية:-** في مختلف المسائل العلمية يتم الحصول على بيانات المسالة بالملاحظة أو القياس وبما إن الدقة في هاتين الحالتين محدودة ، لذا نرى إن هذه البيانات تعاني من الأخطاء فإذا أردنا قياس مسافة من خلال النظر أو الذراع فان القياسات لا بمكن أن تكون ألا بدقة محدودة إن التسمية لهذا النوع من الأخطاء تطلق أيضا على الأخطاء في البيانات من الأعداد الغير نسبية مثل

$$\sqrt{2}=1.1414235.......$$

$$\pi=3.142857....$$

$$e^x=2.787.....$$

- **أخطاء القطع والتدوير:-**إن واحد من أهم مصادر الأخطاء هو استعمال الأعداد المدورة بدل من الأعداد المضبوطة وتسمى هذه العملية بالتقريب ، حيث إن التقريب يقسم إلى قسميين هما:-

  - **تقريب التدوير:-** يعتمد على العدد المجاور للعدد الصحيح من جهة اليمين فإذا كان اكبر أو يساوي 5 نضيف واحد إلى الأمام وإذا كان اقل من 5 لا نجري أي تغير حيث إن الخطاء الناتج من تدوير عدد إلى عدد معين من الأرقام المميزة يسمى بخطاء التدوير.

  - **تقريب القطع:-** يقوم بقطع الرقم من جهة اليمين مهما كانت قيمتها حيث إن الخطاء الناتج من القطع عدد إلى عدد معين من الأرقام المميزة يسمى بخطاء القطع.

ملاحظات

☒ إن الآلات الحاسبة الالكترونية لا تدور الإعداد بالتقطعها وعليه فان الخطأ بالإعداد الناتجة يسمى بخطأ القطع وقيمته في معظم الحالات اكبر من خطأ التدوير.

☒ إذا لم يتم تحديد التقريب با أي طريقة فيتم تطبيق الحالتين على العدد.

أمثلة

مثال 1

إذا كان لديك الأرقام الآتية:-

أ- (5.1237) قرب هذا العدد إلى ثلاثة مراتب باستخدام أسلوب القطع مرة وأسلوب التدوير مرة ثانية.

الحل:-

أسلوب القطع $x^*=5.123$

أسلوب التدوير $x^*=5.124$

مثال 2

إذا كانت لديك المعلومات الآتية:- $f(x)=x^2-2x+1$ وقيمة $x=1.4273$

جد أ- الحل الحقيقي للدالة f(x)

ب- الحل التقريبي باستخدام القطع لثلاثة مراتب عشرية.

ت- الحل التقريبي باستخدام التدوير لثلاثة مراتب عشرية.

الحل :-

أ- $f(x=1.4273) = (1.4273)^2-2(1.4273)+1 = 0.18258529$

ب- $x = 1.4273 \longrightarrow x^* = 1.427$

$f(x^*=1.427) = (1.427)^2-2(1.427)+1$ فكانت النتيجة بالتقريب القطع 0.182329

ت- $x = 1.4273 \longrightarrow x^* = 1.427$

$f(x^*=1.427) = (1.427)^2-2(1.427)+1$ فكانت النتيجة بالتقريب التدوير 0.182329

(3-1)الخطأ المطلق والخطأ النسبي

1 الخطأ المطلق ويرمز له بالرمز A.E $A.E = |x - x^*|$

2 الخطأ النسبي ويرمز له بالرمز R.E

$$R.E = \left| x - x^{*} \right| / x$$

مثال توضيحي:-

إذا كانت x=3.1492 قيمة حقيقة لدالة معينة وكانت $x^{*} = 3.1497$ هي قيمة تقريبا لنفس الدالة فجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي لقيمة x

الحل:-

$$A.E = \left| x - x^{*} \right|$$

$$A.E = \left| 3.1492 - 3.1497 \right| = \left| -0.0005 \right| = 0.0005$$

$$R.E = \left| x - x^{*} \right| / x$$

$$R.E = \left| 3.1492 - 3.1497 \right| / 3.1492 = 0.0015877$$

(4-1)انتشار الخطأ في العمليات الحسابية

إذا كانت x^{*} و y^{*} قيمتان تقريبيتان لكل من x و y على التوالي فان خطا المطلق والخطأ النسبي للعمليات الحسابية الأربعة تكون كالآتي:-

أ- عملية الجمع

$$y = y^{*} + ey \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$x = x^{*} + ex \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$x + y = 1 + 2$$

$$x + y = x^{*} + ex + y^{*} + ey$$

$$(x + y) = (x^{*} + y^{*}) + (e_x + e_y)$$

$$(x + y) - (x^{*} + y^{*}) = e_x + e_y$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

$$\delta_{x+y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x + y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{(x\delta_x + y\delta_y)}{x + y}$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} \ldots\ldots\ldots \delta_y = \frac{e_y}{y}$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية الجمع يكون كالأتي :-

$$e_{x+y} = e_x + e_y \qquad \delta_{x+y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

ب- عملية الطرح:-

$$y = y^{*} + ey \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$x = x^{*} + ex \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$
$$x - y = 2 - 1$$
$$x - y = x^{*} + ex - (y^{*} + ey)$$
$$(x - y) = x^{*} + e_x - y^{*} - e_y$$
$$(x - y) = (x^{*} - y^{*}) + (e_x - e_y)$$
$$(x - y) - (x^{*} - y^{*}) = e_x - e_y$$
$$e_{x-y} = e_x - e_y$$
$$\delta_{x+y} = \frac{e_x - e_y}{x - y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x-y}}{x - y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{(x\delta_x - y\delta_y)}{x - y}$$
$$\delta_x = \frac{e_x}{x} \ldots\ldots\ldots \delta_y = \frac{e_y}{y}$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية الطرح يكون كالأتي :-

$$e_{x-y} = e_x - e_y \qquad \delta_{x-y} = \frac{e_x - e_y}{x - y}$$

ت- عملية الضرب:-

$$e_{x.y} = xy - x^{*}y^{*}$$
$$e_{x.y} = x.y - \left[(x - e_x)(y - e_y)\right]$$
$$e_{x.y} = xy - xy + xe_y + ye_x - e_x e_y$$
$$e_{xy} = xe_y + ye_x$$
$$\delta_{xy} = \frac{e_{xy}}{xy} = \frac{xe_y}{xy} + \frac{ye_x}{xy}$$

or

$$\delta_{xy} = \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

or

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية الضرب يكون كالأتي :-

$$e_{xy} = xe_y + ye_x \qquad \delta_{xy} = \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

د- عملية القسمة:-

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x-e_x}{y-e_y}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x-e_x}{y} - \left[\frac{1}{1-\frac{e_y}{y}}\right] \text{..........................} 1$$

$$\frac{e_y}{y} = 1 + \frac{e_y}{y} + (\frac{ey}{y})^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \text{..........}$$

وبإهمال الحدود الحاوية على حاصل ضرب خاطئين أو أكثر نحصل على الحد الأتي:-

$$\frac{1}{1-\frac{e_y}{y}} = 1 + \frac{e_y}{y}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x-e_x}{y}\right) - \left(1+\frac{e_y}{y}\right)$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x-e_x}{y}\right) - \left(\frac{xe_y - e_x e_y}{y^2}\right)$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x-e_x}{y}\right) - \left(\frac{xe_y}{y^2}\right)$$

$$e\frac{x}{y} = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} + \frac{e_x}{y} - \frac{xe_y}{y^2}$$

$$e\frac{x}{y} = \frac{e_x}{y} - \frac{xe_y}{y^2}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\left[e_x - \frac{xe_y}{y}\right]$$

$$\delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية القسمة يكون كالأتي :-

$$e\frac{x}{y} = \frac{1}{y}\left[e_x - \frac{xe_y}{y}\right]$$

$$\delta\frac{x}{y} = \delta_x - \delta_y$$

أمثلة

مثال1
إذا كانت لديك المعلومات الآتية :-

$X^*=3.68$	$X=3.675$
$Y^*=2.133$	$Y=2.1325$

- جد الخطأ المطلق والخطأ النسبي لكل من x, y.
- الخطأ المطلق والنسبي للحاصل عملية الجمع.
- الخطأ المطلق والنسبي للحاصل عملية الطرح.

الحل :-

$$1-AE(x)=|3.675-3.68|=0.005$$
$$AE(y)=|2.1325-2.133|=0.0005$$
$$RE(x)=\frac{0.005}{3.675}=0.0013605$$
$$RE(y)=\frac{0.0005}{2.1325}=0.8002344$$

$$2-e_{x+y}=e_x+e_y$$
$$e_{x+y}=0.005+0.0005=0.0055$$
$$\delta_{x+y}=\frac{e_x+e_y}{x+y}$$
$$\delta_{x+y}=\frac{0.0055}{5.8075}=0.000947$$

$$3-e_{x-y}=e_x-e_y$$
$$e_{x-y}=0.005-0.0005=0.0045$$
$$\delta_{x-y}=\frac{e_{x-y}}{x-y}$$
$$\delta_{x-y}=\frac{0.0045}{3.675-2.1325}=0.00291$$

مثال 2
إذا كانت لديك المعلومات الآتية :-

X=25.019992
Y=25.21132

جد الخطأ المطلق والخطأ النسبي لكل من x, y للعمليات الرياضية الأربعة.
بعد تقريب المتغيرات إلى أربع مراتب عشرية باستخدام القطع.

الحل :-

X=25.019992 $\qquad$ X^*=25.0199
Y=25.21132 $\qquad$ Y^*= 25.2113

الخطأ المطلق

$$e(x) = |25.019992 - 25.0199| = 0.000092$$
$$e(y) = |25.21132 - 25.2113| = 0.00002$$
$$e(x+y) = ex + ey$$
$$e(x+y) = 0.000092 + 0.00002 = 0.000112$$
$$e(x-y) = ex - ey$$
$$e(x-y) = 0.000092 - 0.00002 = 0.000072$$
$$exy = xey + yex$$
$$exy = 25.019992 * 0.00002 + 25.21132 * 0.000092 = 0.00281984$$
$$ex/y = 1/y(ex - xey/y)$$
$$ex/y = 1/25.21132(0.000092 - (25.019992)(0.00002)/25.21132$$
$$ex/y = 0.000002861$$

الخطأ النسبي

$$\delta(x) = ex/x$$
$$\delta(x) = 0.000092/25.019992 = 0.000003677$$
$$\delta(y) = ey/y$$
$$\delta(y) = 0.00002/25.21132 = 0.000000793$$
$$\delta(x+y) = ex + ey/x + y$$
$$\delta(x+y) = 0.000092 + 0.00002/25.019992 + 25.21132 = 0.000002229$$
$$\delta(x-y) = ex - ey/x - y$$
$$\delta(x-y) = 0.000092 - 0.00002/25.019992 - 25.21132 = -0.000376317$$
$$exy = ey/y + ex/x$$
$$exy = 0.00002/25.21132 + 0.000092/25.019992 = 0.00000447$$

واجبات

الواجب 1

إذا كانت لديك الدالة الآتية x=2.1345 $f(x)=3x^2-7x+1$ جد كل مما يأتي:-

1-الحل الحقيقي.

2 الحل التقريبي باستخدام القطع لثلاثة مراتب عشرية.

3 الحل التقريبي باستخدام التدوير لمرتبتين عشريتين.

4 الخطأ المطلق والخطأ النسبي لكل من النقطة 2 , 1.

الواجب 2

إذا كانت لديك الدالة الآتية $x=4.1357$ $f(x)=2x^2+4x-1$ جد كل مما يأتي:-

1 الحل الحقيقي.

2 الحل التقريبي باستخدام التدوير لمرتبتين عشريتين

3 الخطأ النسبي لـx

الواجب 3

إذا كانت لديك الدالة القيمة $x^*=0.855$ $x=0.8$

$y^*=0.259$ $y=0.2$

1 جد الخطأ المطلق x,y

2. جد الخطأ النسبي x,y

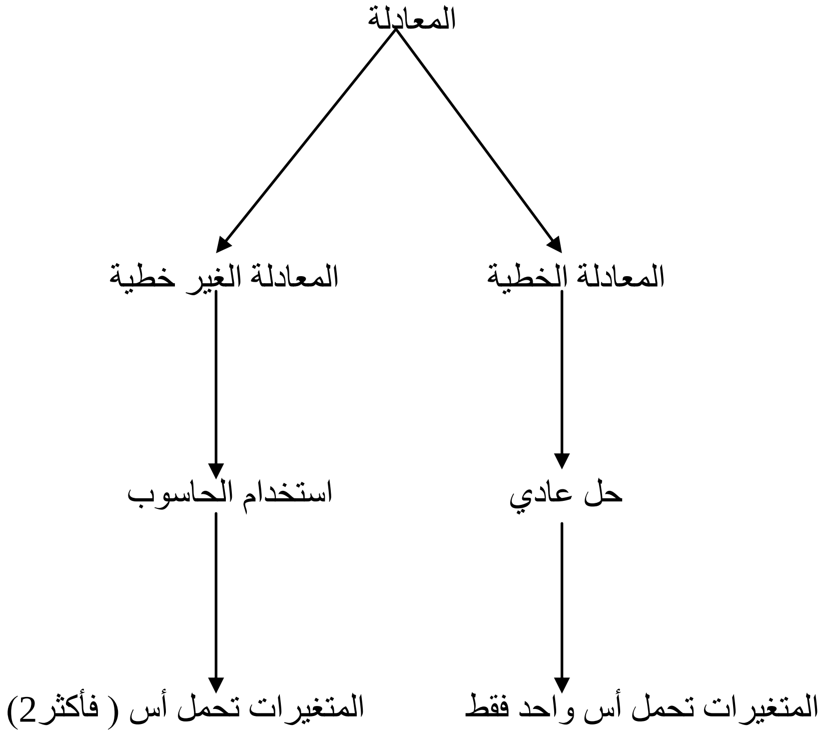
3 جد الخطأ المطلق للعملية الجمع.

4 اذكر قانون الخطأ النسبي للعملية الطرح.

الفصل الثاني

الحل العددي لنظام المعادلات الغير خطية

(1-2) مقدمة



المعادلة الخطية:- هي كل دالة يكون فيها المتغير يحمل أس واحد فقط وترسم على شكل خط مستقيم

1/ f(x)=2x+5

2/f(x)=(1/2)x+4

المعادلة الغير خطية:- هي كل دالة تحمل المتغير فيها أس الرقم (2) فما فوق وترسم على شكل منحي ومثل هذه الدوال الغير خطية هي الدوال المتسامية وتشمل الدوال الآسية و المثلثية و الزائدية.

ولحل أي معادلة غير خطية نستخدم الطرق التكرارية.
فمثلا عندما يراد إيجاد جذور المعادلة التالية $2x^2-4x-3=0$ يتضح من هذه المعادلة أنها معادلة لا خطية من الدرجة الثانية ويمكن استخدام طريقة الدستور لإيجاد جذري هذه المعادلة في حين لو حاولنا أيجاد جذور المعادلتين

$2x^4+x^3-3x^2+4x-1=0$

$X=2\sin(x)$

ترى انه لا يوجد طريقة نظرية أو قانون محدد مباشر لإيجاد جذور مثل هذه المعادلات لذلك يتم اللجوء إلى استخدام الطرق العددية التقريبه لإيجاد الحلول أو الجذور لهذه المعادلات وهذه الحلول تكون تقريبية بالمقارنة فيما إذا كان هنالك حلول نظرية لهذه المعادلات ويعتمد الحل العددي بشكل عام على دقة الخطأ الذي يتم التوصل إلية أو ما يسمى دقة الخطأ أو درجة الدقة أو الضبط.
على أية حال يمكن اعتماد الطرق العددية المعتمدة كأفضل وسيلة لإيجاد الحل التقريبي خاصة إذا كانت المعادلات غير خطية ولا يمكن أيجاد حلول بالطرق النظرية وعلى هذا الأساس توجد طرق عددية متعددة لحل مثل هذه المعادلات وبما أن الجذور التي يمكن تحديدها عدديا هي بأساس يمكن تحديدها تقريبا بالرسم أو الحساب التقريبي وذلك بتعويض قيمة معينة للجذر ومن ثم حساب قيمة الدوال لهذه المعادلة أو المعادلات فان كان هنالك تغير في قيمة الدالة من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب أي بمعنى أخر أن كان هنالك قطع لهذه الدالة للاحداثي (x) وحسب طبيعة الجذر المطلوب أيجاد هو الطرق العددية كثيرة تتركب طبيعة اختيارها على السرعة التي يمكن التوصل إليها إلى حالة التقارب.

((مبرهنة))

الشرط الضروري الكافي لإيجاد حل للمعادلة

$$x = f(x) \Rightarrow x \in [a,b]$$
$$\left|f^{-}(x)\right| \prec L \to \forall x \in [a,b]$$
$$\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \le L$$
$$\left|x_2 - x_1\right| \le L \Rightarrow \prec 1$$

ملاحظة: إن الطرق التكرارية تتكون من ثلاث خطوات أساسية وهي:

- إعطاء شكل الدالة f(x) مع النقطة الابتدائية (x0).
- نعوض النقطة الابتدائية با إحدى الصيغ لا التي سوف نتطرق إليها فنحصل من خلالها على نقطة جديدة هي x1
- نختبر فيما إذا كان $\left|x_1 - x_0\right| \prec \in$

فإذا كان الجواب نعم نتوقف ونعتبر أن (x1) هو الجذر المطلوب أما إذا كان الجواب لا نستمر لإيجاد نقطة جديدة وهي x2

$$\left|x_2 - x_1\right| \prec \in$$

وهكذا إلى أن نصل إلى الحل الأمثل علما أن قيمة الخطأ €=0.001

أهم ما يميز الطرق التكرارية هي النقاط الآتية:-

- السرعة في الوصول إلى الهدف لإيجاد قيمة الجذر
- الدقة في قيمة الحل
- عدد التكرارات فكلما كان عدد التكرارات اقل كانت الطريقة أفضل وأكفى
- قيمة الخطأ أي كلما كانت قيمة الخطأ قليلة تكون الطريقة أكفى

(2-2) تعيين مواقع الجذور

هنالك عدة طرق لتعيين مواقع الجذور منها:-

- نظرية القيمة المتوسطة (طريقة تغير الإشارة).
- نظرية متعددة الحدود.
- نظرية الرسم.

** نظرية القيمة المتوسطة (طريقة تغير الإشارة).

نلاحظ إن اختيار فترة تقسم صغيرة يودي إلى زيادة في العمليات الحسابية ومن ناحية ثانية فان اختيار فترة تقسيم كبيرة يؤدي إلى فقدان بعض الجذور لذلك فان

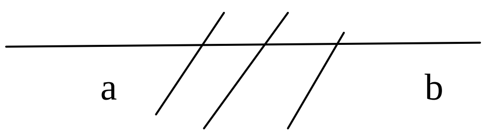
خوارزمية طريقة تغير الإشارة (القيمة المتوسطة) المستخدمة لإيجاد موقع جذر للمعادلة غير الخطية

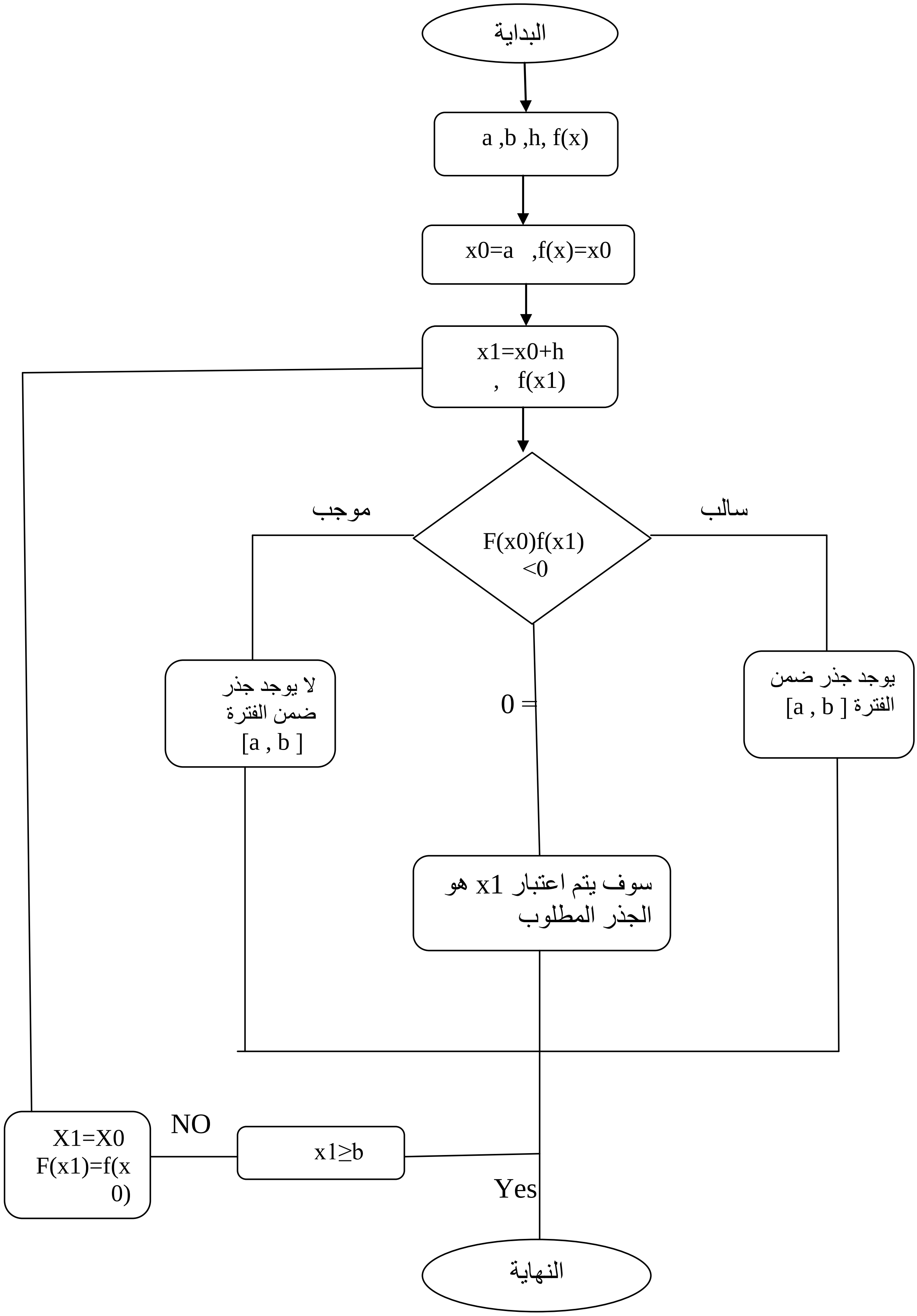
إذا كان لدينا الدالة f(x) معرفة على الفترة المغلقة [a ,b] عندئذ تقسم الفترة إلى أقسام متساوية بمقدار (h) منها نحصل على عدة نقاط وبعدها نجد f(x1)f(x0) فإذا كانت النتيجة

- f(x1)f(x0) > 0 عندئذ لا يوجد جذر في هذه المنطقة و تهمل هذه الفترة.
- f(x1)f(x0) < 0 عندئذ يوجد جذر يقع في هذه الفترة.
- f(x1)f(x0) = 0 عندئذ فان (xi) هو الجذر المطلوب.

المخطط الانسيابي لتعيين موقع الجذر لأي معادلة غير خطية بطريقة تغير الإشارة

عندما يكون لدينا فترة مغلقة مثل [a , b] وفترة تقسيم (h)





الشكل(2-1) المخطط الانسيابي لتعيين موقع الجذر لأي معادلة غير خطية بطريقة تغير الإشارة

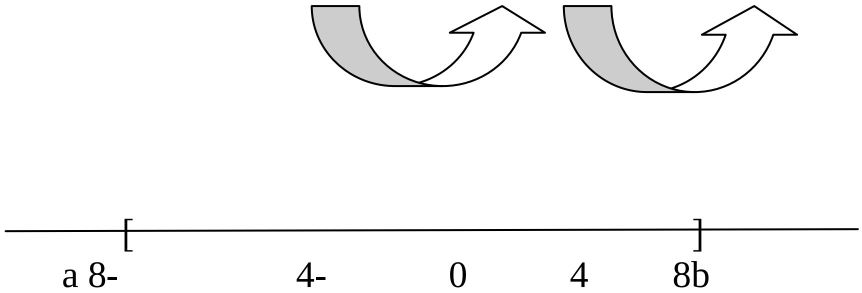
مثال:-
عين مواقع جذور المعادلة الغير خطية للمعادلة الآتية:-

$F(x)= x^4-3x^3+3x^2+26x-10$

في الفترة [-8, 8] حيث إن h = 4 باستخدام نظرية القيمة المتوسطة (طريقة تغير الإشارة)

الحل:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	+	+



f(x):- نعوض كل قيمة من قيم (x) في الدالة ونحصل على رقم مع إشارة ثم نكتب فقط الإشارة و يهمل الرقم ومن السؤال أعلاه نلاحظ إن هنالك جذران في الفترة [0,4] [0 ,4-] عندما كانت فترة التقسيم h =4

ملاحظة:-يعني ا ن أخر قيمة مستخدمة يجب ان تساوي القيمة النهائية للفترة كما في المثال السابق x1=b=8

واجب :- لو فرضنا قيمة h=2 قم بحساب مواقع الجذور بالطريقة تغير الإشارة.

2- نظرية متعددة الحدود

إذا كانت الدالة f(x) يمثل متعددة حدود فيمكن تعيين مواقع جذور المعادلة بالاعتماد على النظرية التالية إذا كانت جذرا للمعادلة

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$$

$$|\alpha| \le 1 + \max\{|a_i|\}$$

مثال:- عيين مواقع الجذور من المعادلة التالية مستخدما طريقة متعددة الحدود

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

الحل:-

$$|\alpha| \le 1 + \max\{|a_i|\}$$

$$|\alpha| \le 1 + \max\{|1|, |-2|, |3|, |1|\}$$

$$|\alpha| \le 1 + \max\{3\}$$

$$|\alpha| \le 1 + 3$$

$$|\alpha| \le 4$$

$$-4 \le \alpha \le 4 \Rightarrow \alpha \in [-4, +4]$$

لابد من وجود جذور خلال هذه الفترة.

3 طريقة الرسم

لا يجاد الجذور التقريبية للمعادلة f(x) = 0 نرسم الدالة y = f(x) ثم نجد نقاط التقاطع لمنحني الدالة مع محور السينات أي قيم x التي تكون عندها قيم y=0 .

أما إذا كانت الدالة من الدوال التي يصعب رسمها فيمكن وضعها بالشكل الأتي f1(x) = f2(x)

حيث إن f1 , f2 تمثل دالتيين يمكن رسمها بسهولة وبذلك تكون مساقط نقاط التقاطع للمنحنيين على المحور السيني جذرا لتلك المعادلة.
وفي معظم الأحيان لا يمكننا الحصول على دقة أعلى باستخدام هذه الطريقة لذلك لا نستخدم هذه الطريقة غالبا

مثال1:-
إذا كان لديك المعادلات الآتية قم بإيجاد الجذور لها باستخدام طريقة الرسم

$y_1=x \quad , \quad y_2 = x^2$

الحل:-

y	x
1	1
2	2
3	3

y	X^2
2	4
0	0
-2	4

وبعد رسم المعادلة الأولى والمعادلة الثانية فان نقطة تقاط المعادلتين هي التي تمثل الفترة إلي يقع فيها الجذر

مثال 2:-
إذا كان لديك المعادلة الآتية قم بإيجاد الجذور لها باستخدام طريقة الرسم

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1$$

الحل:-

$$f(x) = \frac{e^x \sin(x)}{e^x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\sin x = e^{-x}$$

$$f_1 = \sin(x)$$

$$f_2 = e^{-x}$$

(3-2) الطرق التكرارية لحل المعادلات اللاخطية

- **طريقة التكرارات أو الإعادة (طريقة النقطة الصامدة)**

Fixed point it restive method

وهي تعتبر ابسط الطرائق وأقدمها والتي تستخدم في حل المعادلات اللاخطية تعتمد هذه الطريقة على فكرة ترتيب حدود المعادلة والتي هي f(x) =0 بحيث يمكن كتابتها بالصيغة الآتية x = g(x) ويقال لأي نقطة تحقق هذه الصيغة بأنها نقطة صامدة للدالة g(x) وعليه سوف تكون جذرا للمعادلة f(x) =0 إذن الصيغة العامة للطريقة الإعادة أو التكرارات أو النقطة الصامدة هي $x_{i+1} = g(x_i)$ حيث إن قيمة i = 0,1,2, 3,…… فمن خلال هذه الصيغة نلاحظ عند أعطاه بالسؤال (قيمة أولية نحصل على قيمة جديدة (x1) ثم نستخدم هذه القيمة (x1) من اجل الحصول على (x2) وهكذا نحصل على سلسلة من القيم .

خوارزمية طريقة النقطة الصامدة Fixed point in terative method

الغاية منها هو إيجاد احد جذور المعادلة f(x) =0 بعد تحويلها إلى العلاقة x = g(x) عندما يكون هنالك معلومات مدخلة مثل القيمة الابتدائية التخمينية x0 وقيمة الخطأ € أما المخرجات فهي تمثل الجذر التقريبي (w) للمعادلة.

- نفرض إن لدينا كل من f(x), x0, €.
- نجد العلاقة x = g(x).
- نجد قيمة x1 من تعويض قيمة x0 المعطاة بالعلاقة x1 = g(x0)

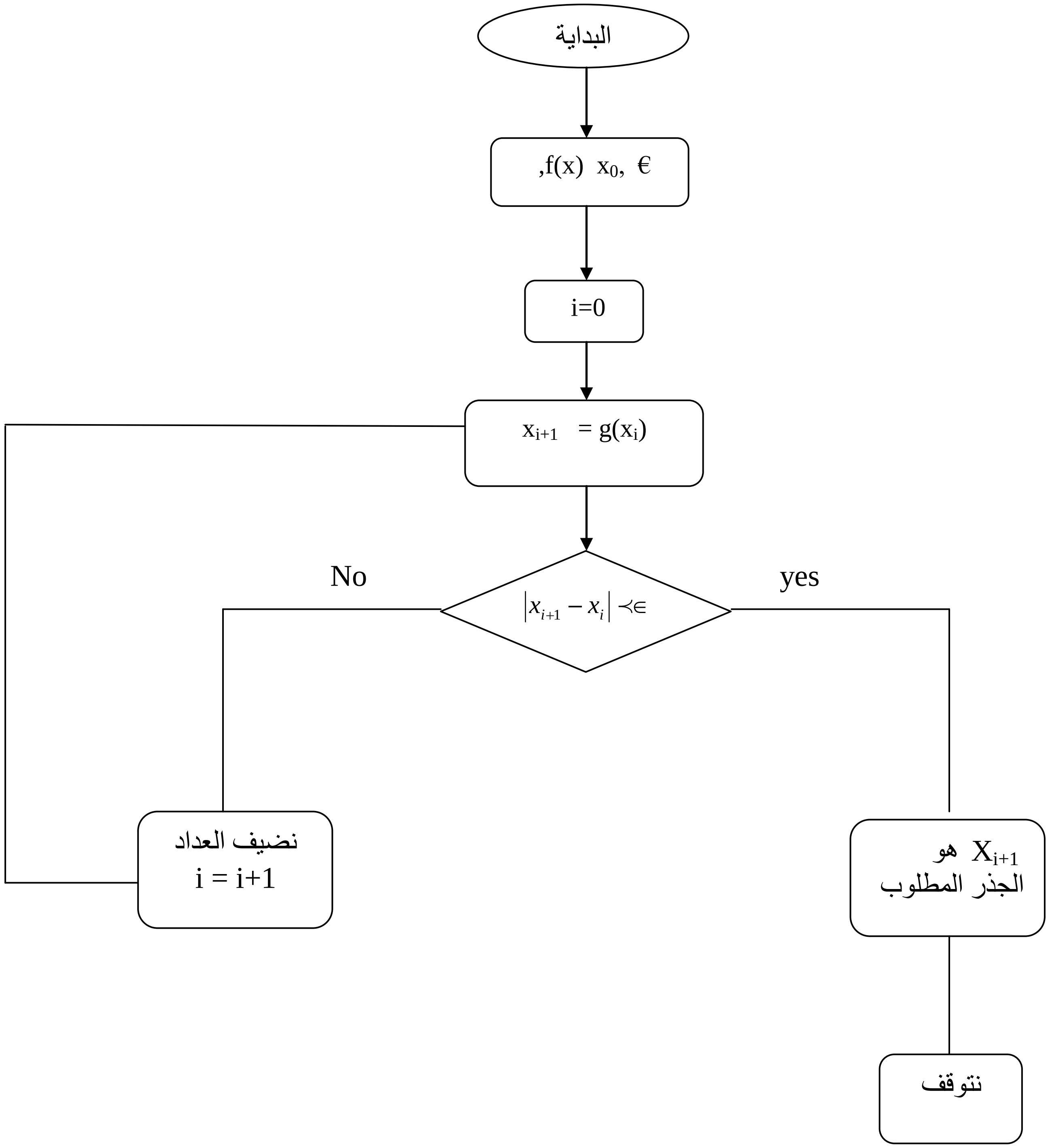
- $|x_1 - x_0| \prec \in$
- نختبر العلاقة في النقطة أعلاه فإذا كان الجواب نعم نتوقف عن الحل ونعتبر x1 هو الجذر المطلوب أما إذا كان الجواب لا نقوم بإيجاد x2 = g(x1) ثم نختبر العلاقة الآتية

$|x_2 - x_1| \prec \in$

ثم نختبر العلاقة أعلاه إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب

المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة النقطة الصامدة أو طريقة الإعادة أو طريقة التكرارات

عندما يكون لدينا مثل دالة معينة f(x) و قيمة خطا ونقطة ابتدائية x_0فان المخطط يكون بالشكل الاتي:-



الشكل(2-2) المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة النقطة الصامدة أو طريقة الإعادة أو طريقة التكرارات

مثال1:- يوضح كيفية إيجاد g(x) من الدالة الأصلية $f(x) = x^2 - x + 1$

الحل:-

الطريقة الأولى:-

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x = x^2 + 1$$
$$x_1 = x_0^2 + 1$$

الطريقة الثانية:-

$$x^2 = x - 1$$
$$x = \pm\sqrt{x-1}$$
$$x_1 = \pm\sqrt{x_0 - 1}$$

الطريقة الثالثة

$$x^2 - x + 1 = 0$$
$$x(x-1) + 1 = 0$$
$$\frac{x(x-1)}{(x-1)} = \frac{-1}{x-1}$$
$$x = \frac{-1}{x-1}$$
$$x_1 = \frac{-1}{x_0 - 1}$$

الطريقة الرابعة :-

$$g(x) = x - f(x)$$
$$= x - (x^2 - x + 1)$$
$$= x - x^2 + x - 1$$
$$= -x^2 + 2x - 1$$
$$g(x_1) = x_0^2 + 2x_0 - 1$$

مثال 2:- إذا كانت لديك المعلومات الآتية $f(x) = x^2-5x+4$, $x_0 = 1.5$ وقيمة الخطأ $€ = 0.001$ جد جذر المعادلة باستخدام طريقة النقطة الصامدة

الحل:-

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{x^2+4}{5} \Rightarrow x = \frac{x^2+4}{5} =$$

$$x_{i+1} = g(x_i) = \frac{x_i^2+4}{5} =$$

$$i = 0$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0^2+4}{5} = \frac{(1.5)^2+4}{5} = 1.25$$

$$\therefore x_1 = 1.25$$

$$|x_1 - x_0| = |1.25 - 1.5| = 0.25 \prec 0.001 \Rightarrow no$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{x^2{}_1+4}{5} = \frac{(1.25)^2+4}{5} = 1.1125$$

$$|x_2 - x_1| = |1.1125 - 1.25| = 0.1375 \prec 0.001 \Rightarrow no$$

.

.

.

.

$$x_{12} = 1.000, x_{13} = 1.000$$

$$|x_{13} - x_{12}| = |1-1| = 0 \prec \in \Rightarrow yes$$

$$x_{13} = 1$$

ملاحظة1:- إذا لم يعطى قيم (x_0) بالسؤال فسنستخدم طريقة تغير الإشارة ولكن بهذه الحالة سوف يعطى الفترة وفترة التقسيم.

ملاحظة2:- إذا طلب بالسؤال إيجاد الحل إلى أن نصل إلى ثلاثة مراحل تكرارية وكان موجود بالسؤال قيمة(x_0) فسوف نقوم بإيجاد كل من (x_1, x_2, x_3) أما إذا ذكر نفس السؤال ولم يعطى قيمة (x_0) فسوف نجد كل من (x_1, x_2, x_0).

ملاحظة 3:- على الرغم من طول خطوات الحل فقد نحصل على تباعد ولكي نتجنب ذلك نقوم بعمل الاختبار الأتي:-

$$g(x_0) \Rightarrow g^-(x_0)$$

$$|g^-(x_0)| \prec 1 \text{ تقارب}$$

$$|g^-(x_0)| \succ 1 \text{ تباعد}$$

وبالاعتماد على المثال أعلاه سوف نختبر هل الحل تقارب أم تباعد

$$g(x) = \frac{x^2+4}{5}, x_0 = 1.5$$

$$g(x_0) = \frac{x_0^2+4}{5} \rightarrow \frac{x_0^2}{5} + \frac{4}{5}$$

$$g^{-}(x_0)=\frac{2x_0}{5}+0$$

$$\left|g^{-}(x_0)\right|=\left|\frac{2(1.5)}{5}\right|=\frac{3}{5}\prec 1\rightarrow 0.6\prec 1 \text{تقارب}$$

$$x_0=1.5$$
$$x_1=1.25$$
$$|x_1-x_0|=0.25$$
$$|x_2-x_1|=0.13$$

- **طريقة تعجيل النقطة الصامدة بطريقة (Aitken)**

تستخدم طريقة (Aitken) لتعجيل تقارب بعض الطرق التكرارية وذلك عن طريق استخدام ثلاثة قيم تقريبية متعاقبة وهي: x_i, x_{i+1}, x_{i+2} يتم استخدامها با أي طريقة من الطرق التكرارية ثم استخدام العلاقة التالية التخمينية لتخمين قيمة جديدة محسنة وهي:

$$\lambda_i=x_i-\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i},.......i=0,1,2,3....$$

حيث نحصل على سلسلة من القيم حيث نتقارب نحو الجذر أسرع من سلسلة القيم بالنسبة x_i

$$\{\lambda\}_{i=0}^{\infty}\xrightarrow{converge}Root$$

ملاحظة:- إن الغاية من طريقة آيتكن أو طريقة تعجيل النقطة الصامدة هو تسريع الوصول إلى الجذر لطريقة النقطة الصامدة الاعتيادية $x=g(x)$ عندما تكون هنالك قيمة تخمينية أولية ل x_0

خوارزمية طريقة تعجيل النقطة الصامدة بطريقة (Aitken)

- احسب قيمة x_1 من خلال $x_1 = g(x_0)$.
- احسب قيمة x_2 من خلال $x_2 = g(x_1)$.
- احسب قيمة الجذر بطريقة أتيكن من خلال تطبيق المعادلة الآتية:

$$\lambda_1=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$

- سوف نتوقف عن الحل ونحصل على الجذر المطلوب (w) للمعادلة إذا تحقق الشرط الأتي:-

$$|\lambda-x_0|\prec\in\rightarrow yes$$

- أما إذا لم يتحقق الشرط الأتي

$$|\lambda-x_0|\prec\in\rightarrow no$$

نرجع مرة ثانية لحساب القيم من جديد

$$\lambda=x_0$$
$$x_1=g(x_0=\lambda)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$\lambda_2=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$
$$|\lambda_2-x_0|\prec\in$$

مثال:-
جد جذور المعادلة اللاخطية الآتية بطريقة آيتكن علما إن الدالة هي $x_0 = 4, € = 0.001, f(x) = x^2-2x-3$
الحل:-

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$x = g(x)$$
$$x^2 = 2x + 3$$
$$x = \sqrt{2x + 3}$$
$$x_1 = g(x_0 = 4) = \sqrt{2x_0 + 3} = \sqrt{2 * 4 + 3} = 3.316$$
$$x_2 = g(x_1 = 3.316) = \sqrt{2x_1 + 3} = \sqrt{2(3.316) + 3} = 3.103$$
$$\lambda_1 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 4 - \frac{(3.316 - 4)^2}{3.103 - 2(3.316) + 4} = 3.0067$$
$$|\lambda_1 - x_0| \prec \in \rightarrow |3.0067 - 4| \rightarrow |-0.9933| \prec \in$$
$$0.9933 \neq \prec \in$$
$$x_1 = g(x_0 = \lambda_1 = 3.0067)$$
$$x_1 = \sqrt{2(3.0067) + 3} = 3.0022$$
$$x_2 = \sqrt{2(3.0022) + 3} = 3.0007$$
$$\lambda_2 = 3.0067 - \frac{(3.0022 - 3.0067)^2}{3.0007 - 2(3.0022) + 3.0067} = 2.99995$$
$$|\lambda_2 - x_0| \prec \in \rightarrow |2.99995 - 3.0067| \prec \in \rightarrow |-0.00675| \prec \in$$
$$0.00675 \not\subset \in$$

وهكذا نستمر إلى أن نجد الحل أي الجذر التقريبي للمسالة

- **طريقة تنصيف الفترة أو الفترات أو طريقة الانشطار Bisection Method**

في المحاضرات السابقة اعتمدنا على تغير إشارة قيم الدالة f(x) في نقاط مختارة لتعيين مواقع الدالة f(x) = 0 لنفرض بأنة يوجد جذر للمعادلة في الفترة المغلقة [x_1, x_r] أي إن $f(x_1)* f(x_r) < 0$ إن طريقة تنصيف الفترة تشبه إلى حد بعيد طريقة تعيين مواقع الجذور المدروسة سابقا ففي هذه الطريقة نحسب قيمة الدالة f(x) من نقطة تقع في منتصف المساحة بين x_1, x_r فإذا كانت إشارتهما تختلف في منتصف المسافة بين x_1, x_r فإذا كانت إشارتها تختلف عن أشارة f(x1) فان الجذر يقع بين x_1 والمنتصف أما إذا تشابهت الإشارتان فإنها بالتأكيد ستكون مختلفة عن إشارة $f(x_r)$ وعليه يكون الجذر واقعا بين المنتصف و x_r . ويمكن تكرار العملية هذه عدة مرات للحصول على فترة ضيقة حول الجذر المطلوب.

خوارزمية تصنيف الفترة

نفرض انه لدينا f(x)=0 مستمرة ومعرفة على الفترة المغلقة [a , b]:-

- نجد منتصف الفترة من خلال تطبيق العلاقة الآتية:- (w= a + b/ 2).
- نقوم بتعويض في الدالة كل من النقاط الثلاثة a , b , w.
- نقوم باختبار حاصل ضرب الدوال والحصول على الإشارة الناتجة من عملية الضرب f(a)*f(w).

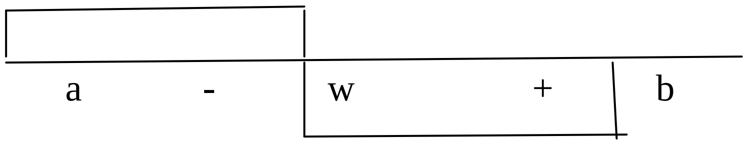
أ- إذا كانت f(a)* f(w) اقل من الصفر أي بمعنى سالب عندئذ فان الفترة الجديدة هي [a , w] و تهمل النقطة (b).

ب- إذا كانت f(a)* f(w) اكبر من الصفر أي بمعنى موجب عندئذ فان الفترة الجديدة هي [w, b] و تهمل النقطة (a).

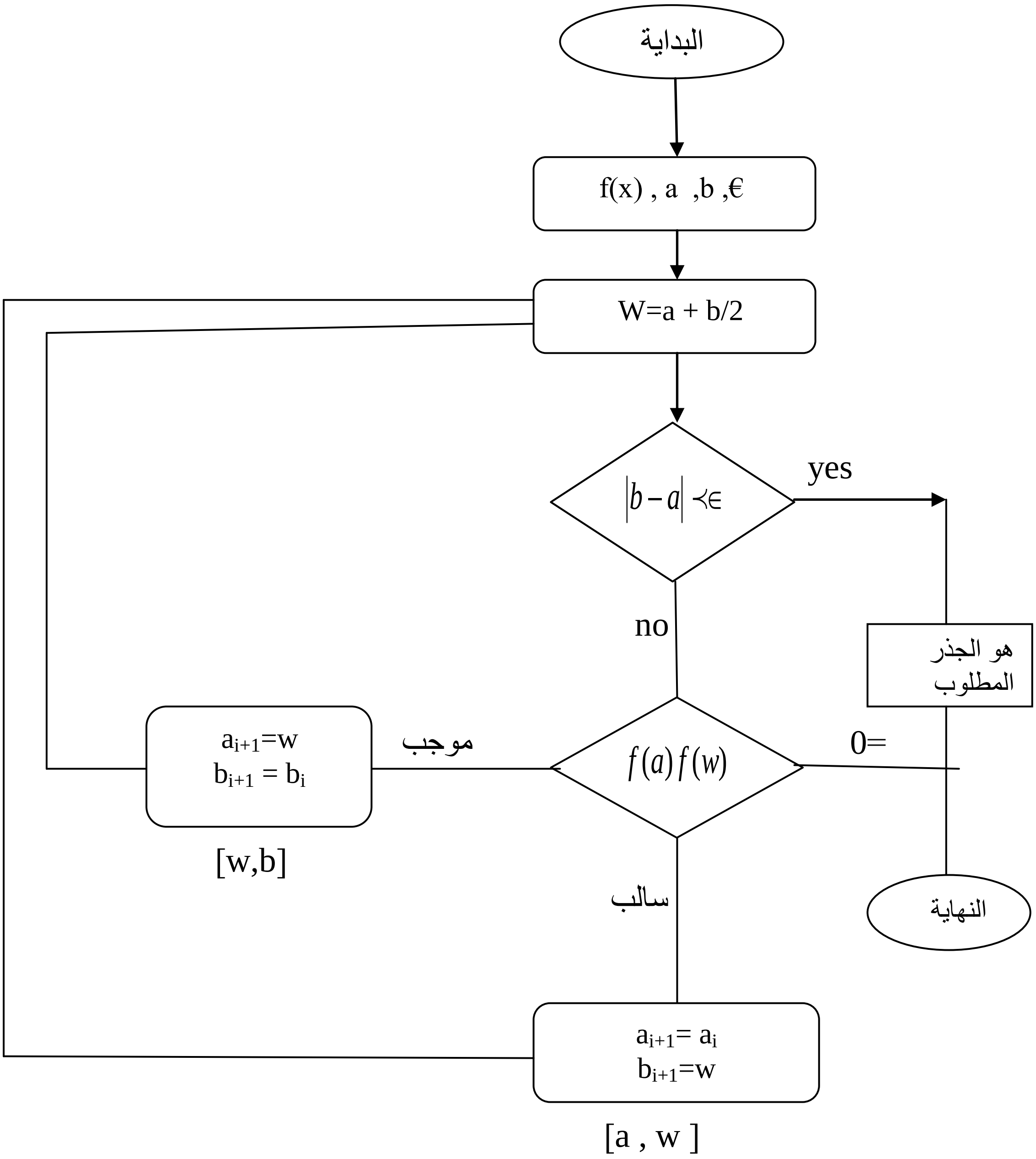
ت- إذا كانت $f(a)*f(w)$ تساوي الصفر عندئذ فان (w) هو الجذر المطلوب.

- نقوم بتصنيف الفترة إلى إن نصل إلى فترة صغيرة جدا تحقق العلاقة الآتية $|b_i - a_i| \prec \in$

ملاحظة:- عند الحل نرسم خط الأعداد ومنه نحدد الفترة إذا كانت (سالبة) نأخذ الفترة [a , w] وإذا كانت (موجبة) نأخذ [w, b]



المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة تنصيف الفترة



الشكل(2-3) المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة تنصيف الفترة

مثال:-
حل المعادلة الآتية باستخدام طريقة تنصيف الفترة $f(x) = x^2+5x+2$ علما إن [2, 4-] وقيمة الخطأ 0.001

الحل:-

$$w_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$|b-a| \prec \in \rightarrow |4-(-2)| = 6 \not\subset \in$$

$$f(a) = f(-2) = -4$$

$$f(b) = f(4) = 38$$

$$f(w) = f(1) = 8$$

$$f(a)\,f(w) = (-4)(8) = -32 \prec 0$$

$$[a, w] = [-2, 1]$$

$$w_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$|b-a| \prec \in \rightarrow |1+2| = 3 \not\subset \in$$

$$f(a) = f(-2) = -4$$

$$f(w) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$f(a)\,f(w) = (-4)(\frac{-1}{4}) = 1 \succ 0$$

$$[w, b] = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$w_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{-1}{2}+1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$|b-a| \prec \in |1+1/2| = 3/2 \not\subset \in$$

وهكذا نستمر إلى أن نصل إلى اصغر فترة التي تحصر الجذر بداخلها.

****مبرهنة****

لتكن f دالة مستمرة ضمن الفترة [a , b] وان f(a) f(b) <0 فان طريقة التنصيف :-

1 تكون متتابعة $\{p_n\}_{n=1}$ في النقاط التي تقترب من الجذر p

2 تحقق الشرط

$$|p_n - p| \le \frac{a-b}{2^n}, n \ge 1$$

**كيفية حساب عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى دقة معينة في الخطأ المتوقع **

$$|p_n - p| \le \frac{a-b}{2^n}, n \ge 1$$

$$e_n \le \frac{b-a}{2^n} \prec \in$$

$$\ln(b-a)^2 - \ln 2^n \prec \ln \in$$

$$-n \ln 2 \prec \ln \in - \ln(b-a)$$

$$-n \prec \frac{\ln \in - \ln(b-a)}{\ln 2} \ldots\ldots * -1$$

$$n \succ \frac{\ln(b-a) - \ln \in}{\ln 2}$$

$$n = \text{int}\left\{\frac{\ln(b-a) - \ln \in}{\ln 2}\right\}$$

وان القانون أعلاه يستخدم لإيجاد قيمة (n)
ومن معلومات المثال السابق سوف نستخدم قانون النظرية أعلاه لمعرفة

$$n = \text{int}\left\{\frac{\ln(b-a) - \ln \in}{\ln 2}\right\}$$

$$n = \text{int}\left\{\frac{\ln(4-(-2)) - \ln(0.001)}{\ln 2}\right\} =$$

$$n = \text{int}\{12.5507468\} = 12$$

بمعنى نحتاج للوصول إلى الجذر المطلوب (12) خطوة

- **طريقة نيوتن- رافسون Newtan- Raphso**

عندما تكون مشتقة الدالة f(x) بسيطة ومن السهل إيجادها فان الجذور الحقيقية للمعادلة اللاخطية يمكن إيجادها بدقة عالية باستخدام طريقة نيوتن- رافسون إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة تعود إلى العالم نيوتن ولكن الصيغة المستخدمة حاليا تعود إلى العالم رافسون. وبشكل عام يكون القانون لهذه الطريقة بالشكل الأتي:-

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{-}(x_i)}$$

من المعادلة أعلاه نلاحظ بأنه كلما كبرت قيمة المشتقة $f^{-}(x)$ صغرت قيمة التصحيح (h) المطلوب إضافتها للحصول على قيمة الجذر المطلوبة ، وهذا يعني إن الاقتراب للجذر يكون سريعا وفعالا عندما يكون المماس للمنحي الدالة قرب النقطة (x0) شاقوليا تقريبا ومن ناحية أخرى فان قيمة (h) تصبح كبيرة عندما تكون المشتقة قريبة من الصفر وبهذا يكون الاقتراب للجذر بطئ أو قد لا يكون هنالك تقارب على الإطلاق.

****عيوب طريقة نيوتن –رافسون****

1 هذه الطريقة تحتاج إلى إيجاد المشتقة الأولى وفي بعض الأحيان لا يمكن إيجاد هذه المشتقة ولاسيما إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق.

2 قد لا يحصل تقارب إلى الجذر الأصلي ولاسيما إذا كانت النقطة الابتدائية بعيدة عن الجذر المطلوب.

****خصائص طريقة نيوتن –رافسون****

1 سرعة الاقتراب تربيعية حيث إن

$$e_{n+1} = x_i - \frac{f^{=}(x_i)}{2f^{-}(x_i)} e_n^2$$

2 نوع الاقتراب محلي لان نقطة البداية يجب إن تكون قريبة من الجذر المطلوب.

3 يتطلب حساب مشتقة الدالة عند كل تكرار ولا يمكن التقارب عندما $f^{-}(x_n) \to 0$

****الشروط الواجب توفيرها لتقارب طريقة نيوتن –رافسون****

1 عندما يكون حاصل ضرب f(a) مع f(b) اقل من الصفر معناها إن a , b تحتوي على الجذر لضمان وجود جذر ضمن الفترة المغلقة [a , b].

2 المشتقة الأولى للدالة لا تساوي صفر بمعنى لا توجد نهاية عظمى أو صغرى في الفترة [a, b]

$$f^{-}(x_n) \neq 0 \rightarrow \forall x_n \in [a,b]$$

3 المشتقة الثانية $f^{=}(x)$ لا تعتبر أشارتها ضمن الفترة [a , b] بمعنى لا يوجد نقطة انقلاب (عدم وجود نقاط انقلاب للدالة f(x)) أي منحي الدالة f(x) يكون أما مقعر آو محدب ضمن الفترة المغلقة [a , b]

4
$$\left| \frac{f(a)}{f^{-}(a)} \right| \leq |b-a|$$

لكي نحصل على تقارب أي إذا كان

$$x_n \in [a,b] \rightarrow x_{n+1} \in [a,b]$$

خوارزمية طريقة نيوتن –رافسون

1 نفرض إن لدينا f(x) , x_0 , €.

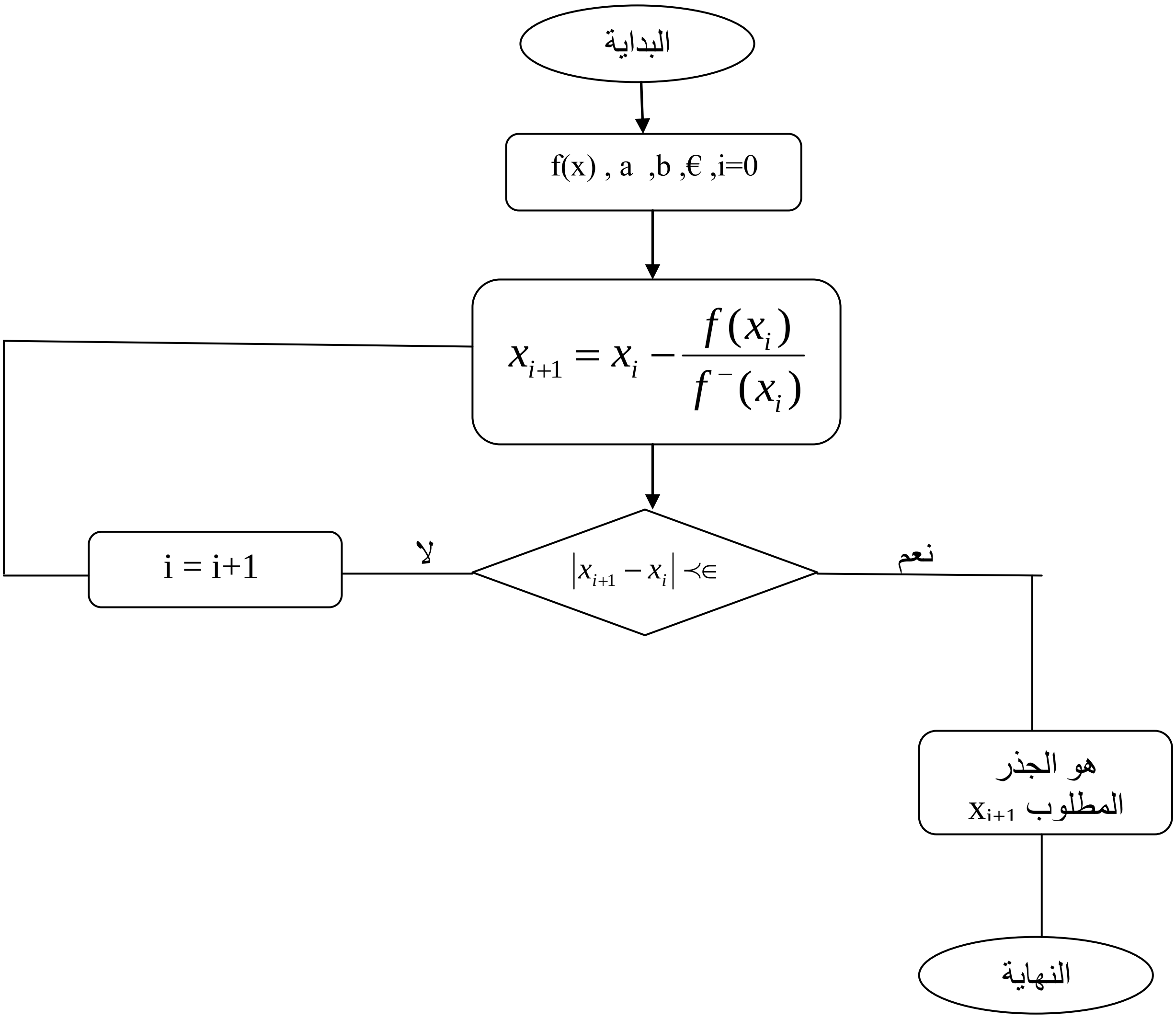
2 نجد نقطة جديدة من خلال استخدام القانون الأتي:-

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{-}(x_i)}$$

3 نختبر العلاقة الآتية فإذا كان الجواب نعم نتوف ونعتبر (x_{i+1}) هو الجذر المطلوب أما إذا كان الجواب لا عندئذ نستمر لإيجاد نقطة جديدة

$$|x_{i+1} - x_i| \prec \in$$

المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة نيوتن- رافسون



الشكل(2-4) المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة نيوتن- رافسون

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن- رافسون جد جذور المعادلة $f(x) = x^3-x-1$, $x_0 = 1$, $€ =0.001$

الحل:-

$$f(x_0 = 1) = (1)^3 - 1 - 1 = -1$$

$$f^-(x_0 = 1) = 3x^2 - 1 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^-(x_0)} = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$|x_1 - x_0| \prec \in \rightarrow |1.5 - 1| \not\subset \in \rightarrow 0.5 \neq \prec 0.001$$

$$f(x_1 = 1.5) = (1.5)^3 - 1.5 - 1 = 0.875$$

$$f^-(x_1 = 1.5) = 3(1.5)^2 - 1 = 5.75$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^-(x_1)} = 1.5 - \frac{0.875}{5.75} = 1.34$$

$$|x_2 - x_1| = |1.34 - 1.5| = 0.16 \not\subset \in$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^-(x_2)} =$$

$$f(x_2 = 1.34) = (1.34)^3 - 1.34 - 1 = 0.066$$

$$f^-(x_2 = 1.34) = 3(1.34)^2 - 1 = 4.38$$

$$x_3 = 1.34 - 0.015 = 1.325$$

$$|x_3 - x_2| \rightarrow |1.325 - 1.34| = 0.015 \neq \prec \in$$

وهكذا نستمر بالحل حتى نحصل على قيمة الجذر المطلوب

**** الحالات الخاصة لطريقة نيوتن-رافسون****

أ- إيجاد الجذر ألتربيعي:

لو حاولنا إيجاد الجذر ألتربيعي لأي عدد وليكن (n) وان $n > 0$ باستعمال طريقة نيوتن-رافسون وذلك بالاعتماد علة القانون التالي:-

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left\{x_i + \frac{n}{x_i}\right\} ..,, i = 0,1,2,3,.....$$

مثال:- جد الجذر ألتربيعي للعدد (10) بطريقة نيوتن-رافسون علما إن القيمة الابتدائية هي $x_0 = 3$ وان قيمة الخطأ 0.0000001

الحل:-

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{x_0 + \frac{n}{x_0}\right\} =$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{3 + \frac{10}{3}\right\} = 3.1667$$

$$|x_1 - x_0| \prec \in \Rightarrow |3.1667 - 3| = 0.1667 \neq \prec \in$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left\{x_1 + \frac{n}{x_1}\right\} =$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left\{3.1667 + \frac{10}{3.1667}\right\} = 3.1623$$

$$|x_2 - x_1| \not\subset \in |3.1623 - 3.1667| = 0.0044 \not\subset \in$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left\{x_2 + \frac{n}{x_2}\right\} =$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left\{3.1623 + \frac{10}{3.1623}\right\} = 3.1623$$

$$|x_3 - x_2| \prec \in \Rightarrow |3.1623 - 3.1623| = 0 \prec 0.0000001$$

$$\therefore x_3 = 3.1623$$

إذن الجذر ألتربيعي للرقم (10) هو الجذر الثالث $x_3 = 3.1623$ بطريقة نيوتن –رافسون

ب - إيجاد الجذر لأي رتبة

إن القانون المستخدم لحساب الجذر لأي رتبة حسب طريقة نيوتن-رافسون هو

$$x_{i+1} = \left\{1 - \frac{1}{k}\right\} x_i + \frac{n}{k} x_i^{1-k} .., i = 0,1,2,3,....., k = 2,3,4,......$$

مثال:- جد الجذر ألتكعيبي للعدد (7) بطريقة نيوتن-رافسون علما إن القيمة الابتدائية هي $x_0 = 1.5$ وان قيمة الخطأ 0.001

الحل:-

$$x_1 = \left\{1 - \frac{1}{3}\right\} 1.5 + \frac{7}{3}(1.5)^{1-3} = 2.03704$$

$$|x_1 - x_0| \prec \in \Rightarrow |2.03704 - 1.5| = 0.53704 \neq \prec \in$$

$$x_2 = \left[1 - \frac{1}{3}\right](2.03704) + \frac{7}{3}(2.03704)^{-2} = 1.92034$$

$$|x_2 - x_1| \prec \in \Rightarrow |1.92034 - 2.03704| = 0.1167 \neq \prec \in$$

$$x_3 = \left[1 - \frac{1}{3}\right](1.92034) + \frac{7}{3}(1.92034)^{-2} = 1.91296$$

$$|x_3 - x_2| \prec \in \Rightarrow |1.91296 - 1.92034| = 0.00738 \neq \prec \in$$

$$x_4 = \left(\frac{2}{3}\right)(1.91296) + \frac{7}{3}(1.91296)^{-2} = 1.91293$$

$$|x_4 - x_3| \prec \in \Rightarrow |1.91293 - 1.91296| = 0.00003 \prec 0.001$$

$$\therefore x_4 = 1.91293$$

إذن الجذر التكعيبي للعد (7) هو الجذر الرابع تم حسابه بطريقة نيوتن-رافسون.

ج – إيجاد مقلوب أي رقم

إن القانون المستخدم لحساب مقلوب أي رقم حسب طريقة نيوتن-رافسون هو

$$x_{i+1} = x_i(2 - nx_i).., i = 0,1,2,3,....$$

مثال:-
جد مقلوب العدد (2) باستخدام طريقة نيوتن-رافسون علما $x_0 = 0.1, € = 0.0001$
الحل:-

$$x_1 = x_0(2 - nx_0)$$
$$x_1 = 0.1(2 - 2(0.1)) = 0.18$$
$$|x_1 - x_0| \prec \in \Rightarrow |0.18 - 0.1| = 0.08 \neq\prec 0.0001$$
$$x_2 = 0.18(2 - 2(0.18)) = 0.2952$$
$$|x_2 - x_1| \prec \in \Rightarrow |0.2952 - 0.18| = 0.1152 \neq\prec 0.0001$$
$$x_3 = 0.2952(2 - 2(0.2952)) = 0.4161$$
$$|x_3 - x_2| \prec \in \Rightarrow |0.4161 - 0.2952| = 0.1209 \neq\prec 0.0001$$
$$x_4 = 0.4161(2 - 2(0.4161)) = 0.4859$$
$$|x_4 - x_3| \prec \in \Rightarrow |0.4859 - 0.4161| = 0.0698 \neq\prec 0.0001$$
$$x_5 = 0.4859(2 - 2(0.4859)) = 0.4996$$
$$|x_5 - x_4| \prec \in \Rightarrow |0.4996 - 0.4859| = 0.0137 \neq\prec 0.0001$$
$$x_6 = 0.4996(2 - 2(0.4996)) = 0.4999$$
$$|x_6 - x_5| \prec \in \Rightarrow |0.4999 - 0.4996| = 0.0003 \neq\prec 0.0001$$
$$x_7 = 0.4999(2 - 2(0.4999)) = 0.4999$$
$$|x_7 - x_6| \prec \in \Rightarrow |0.4999 - 0.4999| = 0 \prec 0.0001$$
$$x_7 = 0.4999 \cong \frac{1}{2}$$

إذن مقلوب العد (2) هو الجذر السابع الذي تم حسابه بطريقة نيوتن-رافسون

• طريقة الموضع الكاذب False position method

تعتبر هذه الطريقة من الطرق القديمة للحساب جذور المعادلة حيث نجد عددين مثل x_1, x_2 بحيث يقع الجذر المطلوب x_3 بينهما إن مخطط الدالة $y = f(x)$ يقطع المحور x في النقطتين x_1, x_2 وان $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ ولهما قيمتان مختلفتان بما انه بالإمكان تقريب أي قطعة من منحني الدالة إلى خط مستقيم لذا سوف نفرض إن قطعة المستقيم $\overline{PQ} = \overline{(x_1,y_1)\ (x_2,y_2)}$ بمثابة تقريب للدالة $f(x)$ في الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$ وبالتالي تعتبر نقطة تقاطع المستقيم مع المحور (x) هي قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$

اشتقاق الصيغة العامة للحساب القيمة التقريبية للجذر باستخدام طريقة الموضع الكاذب

نحسب قيمة (c_1) من معادلة خط المستقيم (L)

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

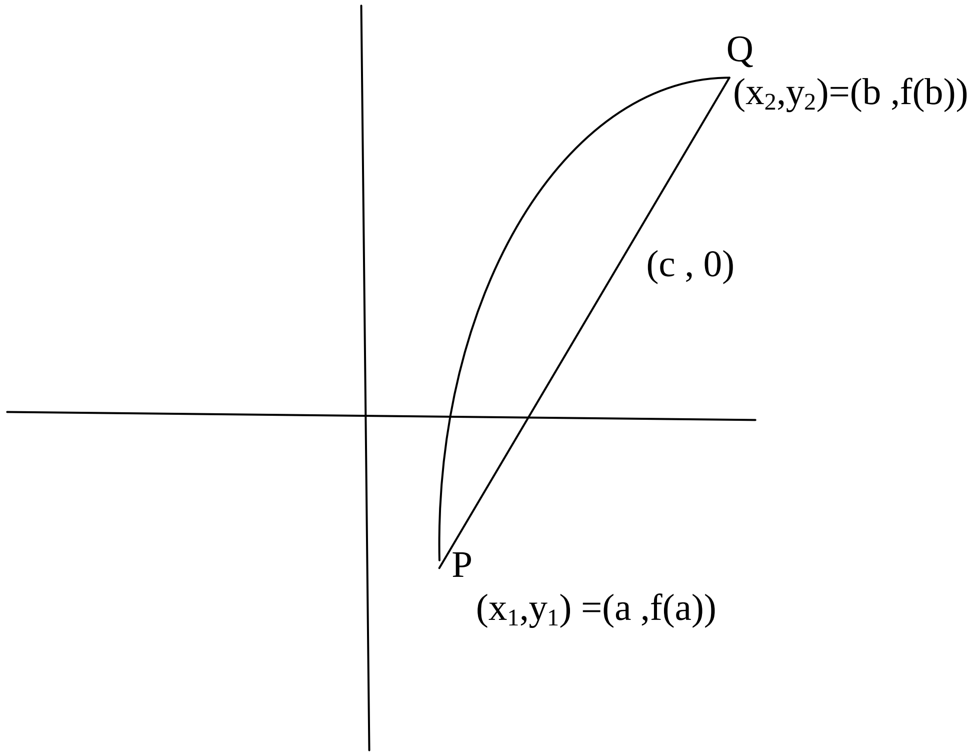
$$(x_1, y_1) \Rightarrow (a, f(a))$$
$$(x_2, y_2) \Rightarrow (b, f(b))$$
$$(x, y) \Rightarrow (c_1, f(c_1))$$

بوضع $f(c_1) = 0$ نحصل على:

$$\frac{0-f(b)}{c_1-b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$-f(b)(b-a)=(c_1-b)(f(b)-f(a))$$
$$-f(b)(b-a)=c_1(f(b)\_f(a))-b(f(b)-f(a))$$
$$b(f(b)-f(a))-(f(b)(b-a))=c_1\left[f(b)-f(a)\right]$$
$$\frac{c_1\left[f(b)-f(a)\right]}{\left[f(b)-f(a)\right]}=\frac{b\left[f(b)-f(a)\right]-f(b)-(b-a)}{\left[f(b)-f(a)\right]}$$
$$c_1=\frac{b\left[f(b)-f(a)\right]}{\left[f(b)-f(a)\right]}-\frac{f(b)-(b-a)}{\left[f(b)-f(a)\right]}$$

$$\therefore c_1=b-\frac{f(b)-(b-a)}{f(b)-f(a)}=$$
$$c_1=b-dx$$

إذن يعتبر (c_1) هو الجذر التقريبي المطلوب ويمكن إن نكرر هذه العملية للحصول على الدقة المطلوبة للجذر



الشكل (2-5) الشكل التوضيحي لتعيين الجذر التقريبي للموضع الكاذب

****ملاحظات****

1 إن قيمة (c_1) لا تعتبر تخميا جيدا للجذر وذلك لان القطعة الواصلة مابين نقطتين Q,P هي قطعة مستقيم وليس منحني لذلك يجب أيجاد تقريب أفضل للجذر ويتم ذلك من خلال أبعاده إيجاد النقطتين اللتان تقعان على طرفي المنحني.

2 طريقة الموضع الكاذب تشبه خوارزمية الانشطار عدا القانون المستخدم لحساب الجذر c.

3 بطريقة الانشطار الجذر يأخذ منتصف الفترة أما في طريقة الموضع الكاذب يأخذ الجذر اقل من المنتصف.

4 أسرع طريقة للوصول إلى الجذر هي طريقة الموضع الكاذب. أما أكفى طريقة للوصول للجذر هي طريقة تنصيف الفترات

مميزات طريقة الموضع الكاذب

1 تعتبر طريقة الموضع الكاذب أفضل من طريقة تنصيف الفترة وذلك لأنها تتقارب من الحل أسرع وبعدد اقل من التكرارات.

2 مضمونة الوصول إلى الجذر ولهذا هي ذات النوع اقترابي شمولي.

3 تعتمد هذه الطريقة على تقدير المنحني إلى قطعة مستقيم أي تقريب المعادلة اللاخطية إلى معادلة خطية.

4 نلاحظ عدم استخدام مقياس التوقف $|b_n - a_n| \prec \in$

إذا كانت $(b_n - a_n)$ أحيانا تقترب من الصفر

عيوب طريقة الموضع الكاذب

صعوبة اختيار النقاط الأولية الواقعة على طرفي الجذر Q,P

خوارزمية طريقة الموضع الكاذب

1 إدخال كل من a , b, f(x), € .

2

$$c = b - d_x$$
$$d_x = \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

3 نقوم بحساب حاصل ضرب الدوال f(b)f(c)

أ- $f(b)f(c) = 0$ ففي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعتبر (c) هو الجذر المطلوب.

ب- $f(b)f(c) > 0$ سوف نضع b = c ونحسب f(b) = f(c) وتكون الفترة الجديدة [a, b=c].

ت- $f(b)f(c) < 0$ سوف نضع a =c ونحسب f(a) =f(c) وتكون الفترة الجديدة [c=a,b].

4 نقوم بحساب مقياس التوقف فإذا تحقق الشرط نطبع قيمة (c) وتعتبر هي الجذر المطلوب أما إذا لم يتحقق الشرط فنذهب من جديد ونكرر الخطوات ونقوم بإيجاد قيمة (c) من جديد.

مثال:-

جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة الموضع الكاذب للدالة الآتية علما إن الفترة [0,2] وقيمة الخطأ 0.001

f(x) = x sin(x)-1

الحل:-

$$a_0 = 0 \Rightarrow f(a_0) = -1$$
$$b_0 = 2 \Rightarrow f(b_0) = 0.8185949$$
$$c_1 = b_0 - \frac{f(b_0)(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 2 - \frac{0.8185949(2-0)}{0.8185949 - (-1)} = 2.900249857$$
$$c_1 = 2.900249857 \Rightarrow f(c_1) = -0.306820791$$
$$f(b_1) f(c_1) = (0.8185949)(-0.306820791) = -0.251161935 \prec 0$$
$$\therefore [c = a, b]$$
$$|dx| \prec 0.001 \Rightarrow |-0.900249857| \neq\prec 0.001$$
$$c_2 = b_1 - \frac{f(b_1) - (b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

وهكذا نستمر بالحل إلى أن نجد اصغر فترة تحتوي جذر المطل

- طريقة القاطع **Secant Method**

إن طريقة القاطع لإيجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة تشبه إلى حد بعيد طريقة الموضع الكاذب. لتطبيق الطريقة نقوم أولا بإيجاد تقريبيين للجذر هما (x_0) (x_1) ليس من الضروري أن يكونا على جهتي الجذر المطلوب كما في طريقة الموضع الكاذب ولكي نحسب القيمة التقريبية الجديدة للجذر نجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_0,f(x_0))$ و $(x_1,f(x_1))$، فتكون القيمة التالية للجذر الجديد (x_2) عبارة عن نقطة تقاطع المستقيم مع محور- x وبنفس الطريقة نحسب (x_3) من تقاطع المستقيم المار بالنقطتين $(x_1,f(x_1))$ و $(x_2,f(x_2))$ مع المحور -x بالتكرار نحصل على متتابعة من قيم (x) وذلك بتطبيق الصيغة العامة لطريقة القاطع والتي تمثل بالقانون التالي:-

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

بحيث إن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_0,f(x_0))$ و $(x_1,f(x_1))$ ليس قريبا من الصفر بعبارة أخرى يجب أن لا تكون مشتقة الدالة (f) قرب النقطتين قريبة من الصفر لأنه قد نحصل على متتابعة لقيم x متقاربة ببط أو حتى متباعدة ويمكن ملاحظة ذلك باستخدام خوارزمية طريقة القاطع.

****خوارزمية طريقة القاطع****

- إدخال كل من $x_0, x_1, f(x), €$.
- نحسب كل من $f(x_0), f(x_1)$.
- نجد قيمة x_2 من خلال تطبيق المعادلة الآتية:-

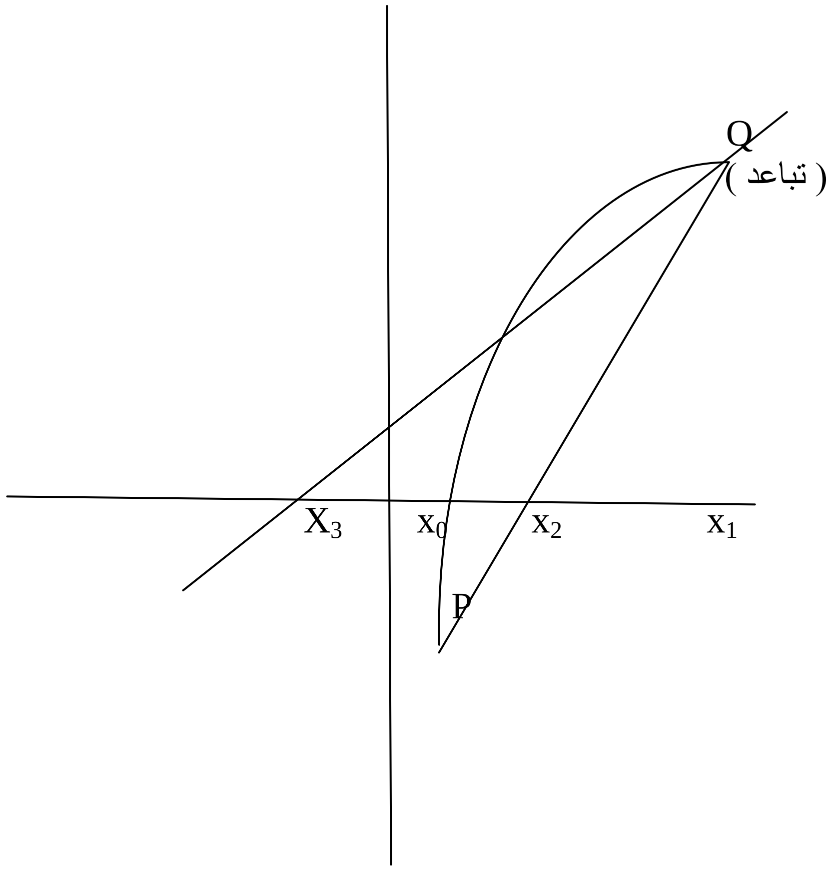
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

- نختبر باستخدام المقياس إذا كان الجواب نعم نتوقف ونعتبر x_2 هو الجذر المطلوب أما أذا كان الجواب لا سوف نستخدم x_1, x_2 لاستخراج x_3 وهكذا إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب

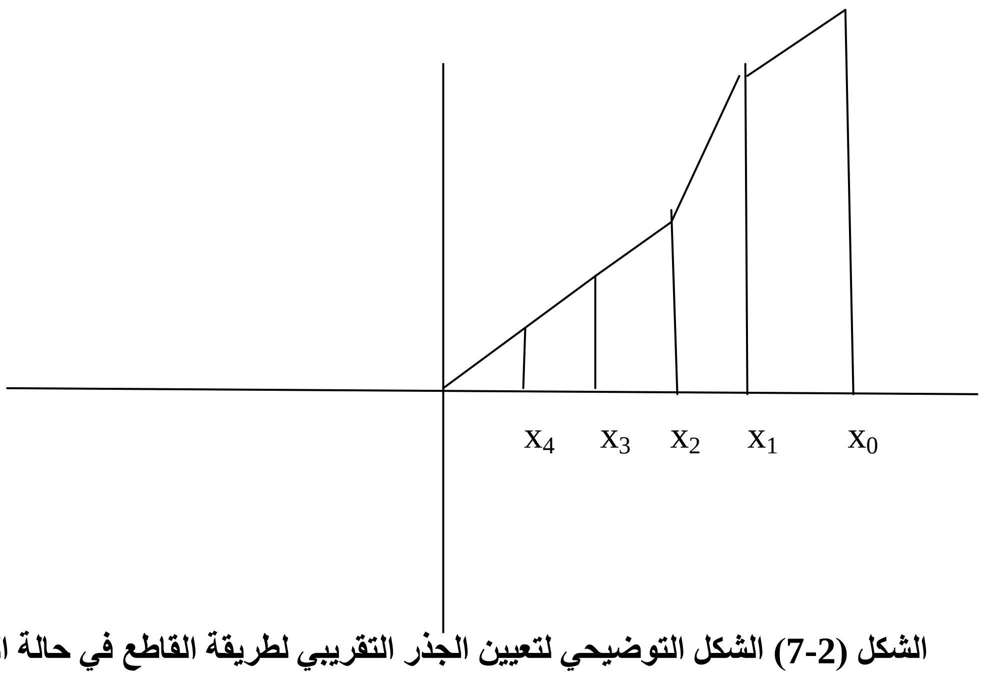
$$|x_2 - x_1| \prec \in$$

****خواص طريقة القاطع ****

- سرعة الاقتراب في طريقة القاطع فوق الخطية.
- نحتاج إلى حساب قيمة الدالة مرة واحده عند كل تكرار.
- نوع الاقتراب محلي لأنها تحتاج أن تكون البداية على إحدى إطراف الجذر.



الشكل (2-6) الشكل التوضيحي لتعيين الجذر التقريبي لطريقة القاطع في حالة التباعد



الشكل (2-7) الشكل التوضيحي لتعيين الجذر التقريبي لطريقة القاطع في حالة التقارب

مثال:-

جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة القاطع للدالة الآتية علما إن $x_0 = -2.6,\ x_1 = -2.4$ وقيمة الخطأ 0.0005

$f(x) = x^3-3x+2=0$

الحل:-

$$f(x_0) = (-2.6)^3 - 3(-2.6) + 2 = -7.776$$
$$f(x_1) = (-2.4)^3 - 3(-2.4) + 2 = -4.624$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} =$$
$$x_2 = -2.4 \frac{-4.624(-2.4 - (-2.6))}{-4.624 - (-7.776)} = -2.106$$
$$|x_2 - x_1| \prec \in \Rightarrow |-2.106 - (-2.4)| = 0.294 \neq\prec 0.0005$$
$$x_1 = -2.4, x_2 = -2.106$$
$$f(x_2) = (-2.106)^3 - 3(-2.106) + 2 = -1.022$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} =$$
$$x_3 = -2.106 - \left\{ \frac{(-1.022)(-2.106) - (-2.4)}{(-1.022) - (-4.624)} \right\} = -2.022$$
$$|x_3 - x_2| \prec 0.0005 \Rightarrow |-2.022 + 2.106| = 0.084 \neq\prec\in$$
$$x_2 = -2.106, x_3 = -2.022$$
$$f(x_2) = -1.022, f(x_3) = -2.2$$
$$x_4 = x_3 - \left[\frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \right]$$
$$x_4 = -2.022 - \left[\frac{(-2.2)(-2.022 + 2.106)}{(-2.2 + 1.022)} \right] = -2.1788$$
$$|x_4 - x_3| \prec \in \Rightarrow |-2.1788 + 2.022| = 0.1568 \neq\prec 0.0005$$

وهكذا نستمر بالحل إلى إن نجد الجذر المطلوب

****الواجبات****

السؤال الأول:- جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة الإعادة أو طريقة النقطة الصامدة

$€ = 0.001$, $x_0 = 4$, $F(x) = x^2-2x-3=0$

السؤال الثاني:- جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة تنصيف الفترة للدوال الآتية علما إن الفترة [1,2] وقيمة الخطأ 0.001

1 $f(x) = x^3+x^2-3x-3$

2 $f(x) = x \ln(x)-1$

السؤال الثالث:- جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة الموضع الكاذب للدالة الآتية علما إن الفترة [1,2] وقيمة الخطأ 0.001

$f(x) = x \log(x)-1$

الفصل الثالث

الحل العددي لنظام المعادلات الخطية

(1-3) مقدمة

لقد ذكرنا في الفصل السابق بعض طرق معالجة منظومات المعادلات الغير خطية ومن الناحية النظرية يمكن تطبيق تلك الطرق على منظومة المعادلات الخطية ولكن لكون هذه الأخيرة اقل تعقيدا بكثير من الأولى ولكثرة ورودها بالمسائل العلمية فان هنالك طرق عددية أفضل لمعالجتها سنذكر بعض منها في هذا الفصل:-

(2-3) المصفوفات

المصفوفة:- وهي عبارة عن مجموعة من الأرقام محصورة مابين قوسين كبيرين حيث إن كل عنصر يقع في الصف (i) من المصفوفة والعمود (j) ويرمز لها بالرمز $A = [a_{ij}]$ وتكون ذات سعة (m) من الصفوف و (n) من الأعمدة.

أنواع المصفوفات

- المصفوفة المربعة:- وهي تلك المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوي للعدد الأعمدة

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة المتناظرة:- يقال لأي مصفوفة على أنها مصفوفة متناظرة إذا حققت الشرط الأتي:-

$a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة القطرية: يقال لأي مصفوفة أنها مصفوفة قطرية إذا كانت عناصر القطر الرئيسي أرقام مختلفة وباقي عناصر القطر أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة الأحادية (الواحدية):- وهي عبارة عن مصفوفة قطريه يرمز لها بالرمز (I) عناصر قطرها الرئيسي يساوي واحد أما باقي العناصر تساوي أصفار.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة الصفرية:- وهي عبارة عن مصفوفة سواء كانت مربعة أو غير مربعة جميع عناصرها أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة المثلثية العليا:- هي عبارة عن مصفوفة جميع عناصرها التي تقع أسفل القطر الرئيسي نساوي أصفار

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة المثلثية السفلى:- هي عبارة عن مصفوفة جميع عناصرها التي تقع اعلي القطر الرئيسي تساوي أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 20 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة المنفردة:- هي مصفوفة مربعة محددها يساوي صفر دائما وكل مصفوفة منفردة ليس لها معكوس.

خواص المصفوفات

1 معكوس المصفوفة

$$W^{-1} = \frac{adj(W)}{|W|}$$

مثال:- جد معكوس المصفوفة

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$W^{-1} = \frac{adj(W)}{|W|}$$

المحدد (W) = حاصل ضرب القطر الرئيسي – حاصل ضرب القطر الثانوي

المحدد(W)= (1)(7)-(2)(3)= 1

$$W^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}}{1}$$

ب- إذا كانت كل من A , B مصفوفتان غير منفردة فان $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ج- محدد المصفوفة القطرية والمصفوفة المثلثية السفلى والعليا وهو عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة

د- $|A^T| = |A|$

طرق إيجاد المحددات

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (1×1) فان محدد تلك المصفوفة يمثل الرقم نفسه

$$W = [7] \Rightarrow |W| = 7$$

$$E = [-8] \Rightarrow |E| = -8$$

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (2×2) فان محدد تلك المصفوفة يمثل
محدد المصفوفة= حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي- حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$|A|=[(a_{11})(a_{22})-(a_{21}a_{12})]$$
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(1)(3)-(2)(0)=3$$

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (3×3) فان محدد تلك المصفوفة سوف يكون بتكرار العمود الأول والثاني وكالاتي:-

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{matrix}$$

$$|C|=[(c_{11}.c_{22}.c_{33})+(c_{12}.c_{23}.c_{31})+(c_{13}.c_{21}.c_{32})]-[(c_{31}.c_{22}.c_{13})+(c_{32}.c_{23}.c_{11})+(c_{33}.c_{21}.c_{12})]$$

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (4×4) أو أكثر فان محدد تلك المصفوفة سوف يتم من خلال تطبيق العامل المميز.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$|A|=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+0+1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\text{مقدار}$$

ملاحظة: دائما يفضل استخدام (حذف الصف أو العمود) الذي يحتوي على اكبر عدد ممكن من الاصفار لتسهيل عملية إيجاد المحدد بسرعة أفضل

$$|A|=\text{رقم} \quad .(-1)^{i+j}\,|\text{محدد}\quad|$$

(3-3) منظومات المعادلات الخطية

يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من (m) من المعادلات الخطية والتي تحتوي على (n) من المجاهيل بالشكل الأتي:-
حيث إن (m) تمثل عدد المعادلات.
وان (n) تمثل عدد المتغيرات (المجاهيل)
ويمكن كتابة المعادلات ثم تحويلها إلى مصفوفات بالشكل الأتي:-

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+........+a_{1n}x_n=b_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+..........+a_{2n}x_n=b_2 \\ &: \\ &: \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...........+a_{mn}x_n=b_m \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$$

إذن يكون النظام أعلاه بالشكل الأتي:-

$$AX=B$$

لذلك توجد ثلاث حالات في هذا النظام:

1 الحالة الأولى:-

إذا كانت $n>m$ أي بمعنى يكون عدد المجاهيل (n) اكبر من عدد المعادلات (m) فان المنظومة لها حل ولكنه ليس حل وحيد إي بمعنى يوجد مالا نهاية من الحلول الممكنة وحسب المثال الأتي:-

$$x_1-4x_2=0 \Rightarrow x_1=4x_2$$
$$let: x_2=1 \Rightarrow x_1=4(1)=4$$
$$let: x_2=2 \Rightarrow x_1=4(2)=8$$
$$let: x_2=-3 \Rightarrow x_1=4(-3)=-12$$
$$\therefore n=2 \succ m=1$$

إذن يوجد ما لانهاية من الحلول حسب الشرط أعلاه

2 الحالة الثانية:-

إذا كان عدد المعادلات (m) اكبر من عدد المجاهيل (n) عندئذ نحل أي معادلتين أنيا ونجد قيم المتغيرات فيها ومن ثم نعوض في المعادلات المتبقية فإذا كانت القيم التي حصلنا عليها تحقق جميع المعادلات عندئذ تسمى المنظومة بالمنظومة المتسقة أما إذا كانت القيم التي حصلنا عليها لا تحقق واحد من المعادلات عندئذ تسمى المنظومة بالمنظومة الغير متسقة وبهذه الحالة لا تكون هنالك حل للمنظومة لان عدد $n<m$

$$2x_1-3x_2=1..........1$$
$$x_1+x_2=0..............2$$
$$5x_1+x_2=3..............3$$

$n=2<m=3$

$$2x_1-3x_2=1$$
$$\mp 2x_1 \mp 2x_2=\mp 0 \text{بالطرح}$$

$$\frac{-5x_2}{-5}=\frac{1}{-5} \Rightarrow x_2=\frac{-1}{5}$$
$$x_1+x_2=0$$
$$x_1+(-\frac{1}{5})=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{5}$$

لكي نختبر هل النظام متسق (يمتلك حل أم لا) يجب أن نعوض قيم x_1, x_2 في جميع المعادلات ويجب أن يكون الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر لكل المعادلات

المعادلة الأولى $x_1 = 1/5, \quad x_2 = -1/5$

2(1/5)-3(-1/5)=1

1=1

المعادلة الثانية $x_1 = 1/5, \quad x_2 = -1/5$

$$(1/5)+(-1/5)=0$$
$$0=0$$

المعادلة الثالثة $x_1 = 1/5, \quad x_2 = -1/5$

$$5\,(1/5)+(-1/5)=3$$
$$4/5=3$$

بما إن الطرف الأيمن لا يساوي الطرف الأيسر إذا لا يكون للنظام الخطي حل لذلك فان المعادلات أعلاه ليس لها حل لان عدد المجاهيل اقل من عدد المعادلات.

3 الحالة الثالثة:-
عندما يكون عدد المعادلات (m) يساوي عدد المجاهيل (n) وتكون المصفوفة مربعة ذات سعة (n ×n) وبشرط إن محددها لا يساوي صفر ولها معكوس: إذن يكون لها حل وحيد فقط وذلك باستخدام أسلوب كريمر

ملاحظات
1 المصفوفة الشاذة هي مصفوفة محددها يساوي صفر أما المصفوفة الغير شاذة هي تلك المصفوفة التي محددها لا يساوي صفر

2 النظام الخطي المتجانس يكتب $AX = 0$ له حل وحيد وهو الحل الصفري.

3 النظام الخطي الغير المتجانس يكتب $AX = B$ له حل وحيد وهو الغير الحل الصفري

(4-3) الحلول العددية للنظام الخطي

هنالك نمطين من الطرق:-
1 النمط الأول:- الطرق المباشرة وهي عبارة عن إجراء سلسلة من العمليات الحسابية لمرة واحدة فقط حيث يتم من خلالها الوصول إلى قيمة تقريبية للحل المطلوب وتشمل الطرق الآتية:-

- طريقة الحذف لكاوس.
- طريقة كاوس- جوردن.
- طريقة التحليل المثلثي وتشمل:
  أ- طريقة التحليل المثلثي لكراوت.
  ب- طريقة التحليل المثلثي جولسكي.
  ت- طريقة التحليل المثلثي دولتل.

2 النمط الثاني:- الطرق الغير مباشرة(الطرق التكرارية):- وهي عبارة عن إجراء سلسلة من العمليات بشكل متكرر أي أكثر من مرة واحدة من اجل الحصول على الحل التقريبي الذي يمتاز بالدقة الجيدة وتشمل هذه الطرق:

- طريقة جاكوبي.
- طريقة كاوس-سيدل.
- طريقة الإرخاء (التراخي)

ومن الجدير بالذكر انه بالإمكان دمج النوعيين من الطرق للحصول على حلول أدق.

- طريقة الحذف لكاوس Gaussian-Elimination Method

تعتبر هذه الطريقة من ابسط وأقدم الطرق المباشرة المستخدمة في حل منظومة المعادلات الخطية وتتلخص هذه الطريقة بوضع المتجه B بجانب المصفوفة A وبالشكل الأتي [A: B] وبعد إجراء بعض التحويلات البسيطة الابتدائية تحول المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا وذلك باستخدام قانون الحذف الأمامي لمعاملات المجاهيل التي

تقع تحت عناصر القطر الرئيسي بشكل متتالي بعدها تبدءا عملية عكسية إي باستخدام قانون التعويض التراجعي حتى نحصل على قيم المتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n, X_{n-1}$

$$x_k = \frac{b_k - \sum a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

مثال1 :- حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام طريقة الحذف لكاوس

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

الحل:- من اجل تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا يجب أن نحول كل من الإعداد a_{21}, a_{31}, a_{32} إلى أصفار

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right|$$

$a_{21} = 4 \longrightarrow 0$

نأخذ الصف الأول ويضرب في العدد -2

```
  2  3  -1  5
 -4  -6  2  -10
+
  4  4  -3  3
-----------------
  0  -2  -1  -7
```

$a_{31} = -2 \longrightarrow 0$

نأخذ الصف الأول

```
  2  3  -1  5
+
 -2  3 -1 1
-----------------
  0  6  -2  6
```

$a_{32} = 6 \longrightarrow 0$

نأخذ الصف الثاني ويضرب قي الرقم (3) ثم يجمع مع الصف الثالث

```
 0  -2  -1  -7    *3
 0  -6  -3  -21
+
 0  6  -2  6
-----------------
 0  0  -5  -15
```

$$\left[\begin{array}{ccc} 2x_1 & 3x_2 & -x_3 \\ 0 & -2x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -5x_3 \end{array}\right]\begin{array}{c} 5 \\ -7 \\ -15 \end{array}$$

وبعد تحويل المصفوفة الاعتيادية إلى مصفوفة مثلثيه عليا يجب إيجاد قيم المتغيرات x_1, x_2, x_3 وذلك باستخدام التعويض التراجعي:

$$\frac{-5x_3}{-5} = \frac{-15}{-5} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$-2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow \frac{-2x_2}{-2} = \frac{7 + x_3}{-2} = \frac{-7 + x_3}{-2} \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow \frac{2x_1}{2} = \frac{5 - 3x_2 + x_3}{2} = \frac{5 - 3(2) + 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1$$

مثال 2:- حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام طريقة الحذف- لكاوس

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$-x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9$$

الحل:- يفضل أول رقم يجب أن يكون (1) لتسهيل الحل
لكي نجعل أول رقم يساوي 1 نستبدل موقع الصف الثاني محل الصف الأول وان هذا التغير لا يوثر على الحل

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -19 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

نأخذ الصف الأول ويضرب في الرقم 3 ثم يجمع مع الصف الثاني لكي نحول الرقم $a_{21} = 0$

```
   1  1   1  7          * -3
  -3  -3  -3  -21
+
   3   4   5   2
----------------------
     0  1  2  -19
```

لجعل الرقم $a_{31} = 0$ سوف نجمع الصف الثالث مع الصف الأول

```
   1  1  1  7
  +
   -1  2  4  9
----------------------
    0  3  5  16
```

لجعل الرقم $a_{32} = 0$ سوف يضرب الصف الثاني في الرقم 3- ثم يجمع مع الصف الثالث

```
   0  1  2  -19          *3
    0  -3  -6  57
 +
   0  3  5  16
----------------------
   0  0  -1  73
```

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ -19 \\ 73 \end{matrix}$$

$$-x_3 = 73 \Rightarrow x_3 = -73$$

$$x_2 + 2x_3 = -19 \Rightarrow x_2 = -19 - 2x_3 = -19 - 2(-73) \Rightarrow x_2 = 127$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 7 - x_2 - x_3 = 7 - 127 + 73 \Rightarrow x_1 = -47$$

- طريقة كاوس -جوردن Gaussian- Jorden Method

وهي نفس طريقة كاوس ولكن بدلا من جعل المصفوفة مثلثيه عليا نجعلها قطرية ومن ثم نجد قيم المتغيرات وذلك من خلال قسمة عناصر المتجهة (B) على عناصر القطر الرئيسي

مثال1 :- حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كاوس- جوردن

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

الحل:-

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{R \to R_{21}} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{R_2 \to R_3}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{matrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{matrix} \xrightarrow{R_2 + R_3} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ -3 \\ -8 \end{matrix} \xrightarrow{-1/3R_2 + R_1}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 \\ -3 \\ -8 \end{matrix} \xrightarrow{-R_3 + R_2} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 \\ 5 \\ -8 \end{matrix} \xrightarrow{-2/3R_3 + R_1} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 31/3 \\ 5 \\ -8 \end{matrix}$$

$$X_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{\frac{31}{3}}{1}$$

$$X_2 = \frac{b}{a_{22}} = \frac{5}{-3}$$

$$X_3 = \frac{-8}{-1}$$

طريقة كاوس- جوردن	طريقة كاوس للحذف
1 نجد [A:B]	1 نجد [A:B]
2 نجري مجموعة من التحويلات الأولية الابتدائية لتحويلها إلى مصفوفة قطرية	2 نجري مجموعة من التحويلات الأولية الابتدائية لتحويلها إلى مصفوفة مثلثيه عليا
3 نجد قيمة المتغيرات من خلال قسمة قيم B على عناصر القطر $X_i=b_i/a_{ii}$	3 نجد قيمة المتغيرات من خلال تطبيق قانون التعويض التراجعي

ملاحظات

- دائما الأرقام للمتغيرات التي تظهر بطريقة كاوس يجب أن تساوي الأرقام التي تظهر بطريقة كاوس-جوردن.
- تعتبر طريقة كاوس للحذف أفضل من طريقة كاوس- جوردن لأنها تحتاج إلى عمليات حسابية بسيطة اقل من الطريقة الثانية من اجل تحويلها إلى مصفوفة مثلثيه عليا.
- عند حل طريقة كاوس للحذف يمكن تحويل المصفوفة إلى مثلثيه سفلى ويتم إيجاد قيم المتغيرات عن طريق التعويض الأمامي.

- طريقة التحليل المثلثي Triangular Decomposition Methods

هدف هذه الطريقة هو تحويل أي مصفوفة إلى مصفوفتين احدهما مثلثيه عليا والأخر مثلثيه سفلى ومن ثم أيجاد قيم x_i, y_i ويرمز لها بالرمز

$$A = L.U$$

ولانجاز التحليل المثلثي يتم إتباع إحدى الطرق التالية

أ- طريقة التحليل المثلثي لكراوت.
ب- طريقة التحليل المثلثي جولسكي.
ت- طريقة التحليل المثلثي دولتل.

وفي الطرق الثلاثة أعلاه يتم حساب عناصر المصفوفتين السفلى والعليا (U.L) غير المعرفة باستخدام عملية ضرب المصفوفات السفلى والعليا ومقارنتهما بعناصر المصفوفة (A) المناظرة لها وبعد انجاز التحليل المثلثي لها يمكن حل نظام المعادلات الخطية على النحو التالي:-

$$\begin{aligned} &AX = B \\ &let: A = L.U \\ &L.U.X = B \\ &let: U.X = Y \\ &L.Y = B \end{aligned}$$

وباستخدام التحليل (التعويض الأمامي والتراجعي) نحصل على قيم X_i, Y_i

أ- طريقة كراوت :- إن هذه الطريقة تشترط أن تكون العناصر القطرية في المصفوفة ألمثلثيه العليا تساوي واحد وكما مبين أدناه:- لتكن لدينا مصفوفة ذات سعة 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} = L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

وحسب طريقة كراوت نفرض إن

$U_{11}=U_{22}=U_{33}=1$

آي بمعنى إن عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة ألمثلثيه العليا تساوي واحد وبفرض إن

$L_{11}=a_{11}$, $L_{21}=a_{21}$, $L_{31}=a_{31}$

سوف تكون المصفوفة العليا والمصفوفة السفلى بالشكل الأتي:-

$$A = L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L.U$$

$$A^* = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} & \end{bmatrix}$$

ومن المصفوفة A^* نحصل على الأتي:-

$$L_{11} = a_{11}$$
$$L_{21} = a_{21}$$
$$L_{31} = a_{31}$$

$$L_{i1} = a_{i1}$$

$$a_{12} = L_{11}U_{12}$$
$$a_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{1j}}{L_{11}}$$

خوارزمية طريقة التحليل ألمثلثي

$$1.L_{i1} = a_{i1}, i = 1,2,3,.......n$$

$$2.U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}}; j = 1,2,3,......n$$

$$3.L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}$$

$$4.U_{jk} = a_{ik} - \sum_{i=1}^{j-1} L_{ji}U_{ik}; k = j+1, j+2,.....$$

$$5.L_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}U_{kn}$$

$$6.Ax = b$$
$$L.Ux = b$$
$$7.y = Ux$$
$$8.Ly = b$$

سوف نحصل من المعادلة (8) على قيمة (y) نعوضها في المعادلة (7) حتى نحصل على قيمة (x)

مثال:- استخدام طريقة كراوت للتحليل ألمثلثي لإيجاد الحل للمنظومة المعادلات التالية:

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 22$$
$$3x_1 + 19x_2 + 17x_3 = 94$$
$$8x_1 + 36x_2 + 25x_3 = 166$$

الحل:-

$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 19 & 17 \\ 8 & 36 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 94 \\ 166 \end{bmatrix}$$
$$A^* = L.U$$

$$A^* = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} & \end{bmatrix}$$

$U_{11}=U_{22}=U_{33}=1$

$L_{11}=a_{11}$, $L_{21}=a_{21}$, $L_{31}=a_{31}$

لكي نجد قيم الصف الأول من المصفوفة A^*

$$L_{11} = a_{11} \Rightarrow L_{11} = 1$$
$$L_{11}U_{12} = (1)U_{12} = 5 \Rightarrow U_{12} = 5$$
$$L_{11}U_{13} = (1)U_{13} = 3 \Rightarrow U_{13} = 3$$

لكي نجد قيم الصف الثاني من المصفوفة A^*

$$L_{21} = a_{21} \Rightarrow L_{21} = 3$$
$$L_{21}U_{12} + L_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22} = 19$$
$$L_{22} = 19 - (3)(5) = 4$$
$$L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} = 17$$
$$(3)(3) + (4)U_{23} = 17 \Rightarrow U_{23} = 2$$

لكي نجد قيم الصف الثالث من المصفوفة A^*

$$L_{31} = 8$$
$$L_{31}U_{12} + L_{32} = 36 \Rightarrow (8)(5) + L_{32}36 \Rightarrow L_{32} = -4$$
$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} = 25$$
$$(8)(3) + (-4)(2) + L_{33} = 25 \Rightarrow L_{33} = 9$$

أذن بعد إيجاد كل من U_{ij} , L_{ij} يمكن كتابة المصفوفة ألمثلثيه العليا والسفلى بشكل الأتي:

$$A = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستخدام قانون التعويض الأمامي يتم إيجاد قيم (y) بالاعتماد على Ly = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 94 \\ 166 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 22 \\ 94 \\ 166 \end{matrix}$$

$$1y_1 = 22 \Rightarrow y_1 = 22$$

$$3y_1 + 4y_2 = 94 \Rightarrow y_2 = \frac{94 - 3(22)}{4} = 7 \Rightarrow y_2 = 7$$

$$8y_1 - 4y_2 + 9y_3 = 166 \Rightarrow y_3 = \frac{166 - [8(22) + (-4)(7)]}{9} = y_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ولكي نجد قيم (x) نطبق القانون التالي:-

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 22 \\ 7 \\ 2 \end{matrix}$$

بما إن المصفوفة ألمثلثيه عليا إذن سوف نستخدم قانون التعويض التراجعي لكي نجد قيمة (x)

$$x_3 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = \frac{7 - 2x_3}{1} = 7 - 2(2) = 3$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 22 \Rightarrow x_1 = \frac{22 - 5(3) - 3(2)}{1} = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب ـ طريقة دولتل :ـ إن هذه الطريقة تشترط أن تكون العناصر القطرية في المصفوفة ألمثلثيه السفلى تساوي واحد وكما مبين أدناه:ـ لتكن لدينا مصفوفة ذات سعة 3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}=L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}*U=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$A=L*U$$

$$A^*=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33} \end{bmatrix}$$

وبما إن الحل باستخدام طريقة دولتل إذن سوف تكون قيم كل من كالأتي:ـ

$L_{11}=L_{22}=L_{33}=1$

$U_{11}=a_{11}$, $U_{12}=a_{12}$, $U_{13}=a_{13}$

ونفس حالة طريقة كراوت سوف مجد بالتعويض الأمامي قيم (y) ومن ثم بالتعويض التراجعي قيم (x)

مثال:ـ استخدام طريقة دولتل للتحليل ألمثلثي لإيجاد الحل للمنظومة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3 &=1 \\ 4x_1+4x_2-3x_3 &=2 \\ -2x_1+3x_2-x_3 &=3 \end{aligned}$$

الحل:ـ

$$AX=B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^*=L.U$$

$$A^*=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33} \end{bmatrix}$$

وحسب طريقة دولتل

$L_{11}=L_{22}=L_{33}=1$

$$U_{11} = a_{11} = 2$$
$$U_{12} = a_{12} = 3$$
$$U_{13} = a_{13} = -1$$
$$L_{21}U_{11} = 4 \Rightarrow L_{21}(2) = 4 \Rightarrow L_{21} = 2$$
$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 4 \Rightarrow (2)(3) + U_{22} = 4 \Rightarrow U_{22} = -2$$
$$L_{21}U_{13} + U_{23} = -3 \Rightarrow (2)(-1) + U_{23} = -3 \Rightarrow U_{23} = -1$$
$$L_{31}U_{11} = -2 \Rightarrow L_{31}(2) = -2 \Rightarrow L_{31} = -1$$
$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 3 \Rightarrow (-1)(3) + L_{32}(-2) = 3 \Rightarrow L_{32} = -3$$
$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = -1 \Rightarrow (-1)(-1) + (-3)(-1) + U_{33} = -1 \Rightarrow U_{33} = -5$$

بعد إيجاد كل من U_{ij} , L_{ij} يمكن كتابة المصفوفة ألمثلثيه العليا والسفلى بالشكل الأتي:-

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وباستخدام قانون التعويض الأمامي يتم إيجاد قيم (y) بالاعتماد على ذلك لان المصفوفة ألمثلثيه السفلى

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1` \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right.$$

$$y_1 = 1$$
$$2y_2 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 - 2(1)$$
$$y_2 = 0$$
$$-y_1 - 3y_2 + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 3 + y_1 + 3y_2$$
$$y_3 = 4$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ولكي نجد قيم x نطبق القانون الأتي:-

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{array} \right.$$

بما إن المصفوفة مثلثيه عليا سوف نطبق قانون التعويض التراجعي لإيجاد قيم (x)

$$\frac{-5x_3}{-5} = \frac{4}{-5} \Rightarrow x_3 = \frac{-4}{5}$$
$$-2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{10}$$

$$2x_1+3x_2-x_3=1 \Rightarrow \frac{2x_1}{2}=\frac{1-3x_2+x_3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{-1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

ث- طريقة جولسكي

وهنا في هذه الطريقة سوف تنطبق عناصر قطري المصفوفة إي إن:-

$$L_{ii}=U_{ii}=V_{ii} \rightarrow \forall i=1,2,3,......n$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ 0 & v_{22} & v_{23} \\ 0 & 0 & v_{33} \end{bmatrix}$$

ويجب أن تكون المصفوفة (A) مصفوفة موجبة متناظرة

الطريق التكرارية

أ طريقة جاكوبي (جاكوب) Jacobs mothed

تعتبر هذه الطريقة من أول الطرق التي استخدمت لإيجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكن قلما تستعمل لأنها طريقة بطئيه الوصول إلى الحل الصحيح ويمكن توضيحها كما يأتي :- ولتكن لدينا ثلاث معادلات

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

حيث يكون إعادة صياغة المعادلات الخطية أعلاه بشكل تكراري بحيث يعرف المجهول الأول من المعادلة الأولى والمجهول الثاني من المعادلة الثانية وهكذا وكما يأتي:-

$$x_1^r=\frac{b_1-a_{12}x_2^{\ r-1}-a_{13}x_3^{\ r-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^{\ r}=\frac{b_2-a_{21}x_1^{r-1}-a_{23}x_3^{r-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^r=\frac{b_3-a_{31}x_1^{r-1}a_{32}x_2^{r-1}}{a_{33}}$$

$$r=0,1,2,3,4,......$$

وان قيمة (r) يمثل القيمة الجديدة المحسوبة توا من قيمة (r-1) الذي يمثل القيمة القديمة نبدأ بالقيم الابتدائية $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ ونحسب القيم (x^1_1, x^1_2, x^1_3) وهذه القيم الجديدة المحسوبة تستعمل كقيم ابتدائية لحساب (x^2_1, x^2_2, x^2_3) وهكذا ويستمر المخطط التكراري حتى يحقق الشرط الأتي:-

$$\left\| x^r - x^{r-1} \right\|$$

$$or$$

$$Max\left|(x_3^r - x_3^{r-1}),(x_2^r - x_2^{r-1}),(x_1^r - x_1^{r-1})\right| \prec \in$$

أحيانا تتقارب (متقاربة) النتائج وأحيانا يصبح بها نوع من التباعد (متباعدة) وبصورة عامة يتم استخدام القانون الأتي للحساب قيم (x) عند كل تكرار

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$

حيث إن طريقة جاكوبي تقسم إلى قسمين :-

أ- الطريقة العامة.

ب- طريقة المصفوفات.

خوارزمية طريقة جاكوبي

- ضع r=1.
- إذا كانت $r \leq N$ نلجأ إلى تطبيق الخطوة الثالثة
-

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$

- إذا تحقق الشرط عندئذ تعتبر كل من قيم (x^1_1, x^1_2, x^1_3) الحل المطلوب ثم نتوقف.
- نطبق $r = r+1$
- إذا لم يتحقق الشرط نكرر العملية من الخطوة الثالثة

واجب :- باستخدام طريقة جاكوبي (العامة) جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

واجب:- باستخدام طريقة جاكوبي (العامة) جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ لثلاثة مكررات فقط $r = 0$

$$20x_1 - x_2 + x_3 = 20$$
$$2x_1 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -18$$

مثال:- باستخدام طريقة جاكوبي (العامة) جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) =$ $(1,1,1,)$ علما إن قيمة الخطأ 0.000001

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

الحل:-

نلاحظ إن قيمة $a_{33} = 0$ وعليه يجب أن نبدل المعادلة (3) مع المعادلة (2) لكي نحصل على تحقيق شرط السيطرة الهيمنة القطرية

$$|a_{ii}| \succ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}} |a_{ij}|$$

إذن سوف يكون الحل كالأتي:-

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$-x_1 + 2x_2 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$a_{11} = 4 \Rightarrow |4| \succ |2| + |1|$$
$$a_{22} = 2 \Rightarrow |2| \succ |-1| + |0|$$
$$a_{33} = 4 \Rightarrow |4| \succ |2| + |1|$$

$$x_1^1 = \frac{11 - 2x_2^0 - x_3^0}{4} \Rightarrow \frac{11 - 2(1) - 1}{4} = 2$$

$$x_2^1 = \frac{3 + x_1^0 - x_3^0}{2} \Rightarrow \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x_3^1 = \frac{16 - 2x_1^0 - x_2^0}{4} \Rightarrow \frac{16 - 2(1) - (1)}{4} = 3.25$$

$$Max\left|(2-1), (2-1), (\frac{13}{4} - 1)\right| \neq\prec 0.000001$$

إذن بما إن الحل لم يتحقق للتكرار الأول نقوم بإيجاد قيم المتغيرات (x) للتكرار الثاني:

$$x_1^2 = \frac{11-2x_2^1 - x_3^1}{4} \Rightarrow \frac{11-2(2)-\frac{13}{4}}{4} = 09375$$

$$x_2^2 = \frac{3+2}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2.5$$

$$x_3^2 = \frac{16-2(2)-2}{4} = 2.5$$

$$Max\left|(0.9375-2),(2.5-2),(2.5-3.25)\right| \neq\prec 0.000001$$

$$1.0625 \neq\prec 0.000001$$

وهكذا نستمر بالحل إلى أن نجد الجذور المطلوبة

X^r_3	X^r_2	X^r_1	r
1	1	1	0
3.25	2	2	1
2.5	2.5	0.9375	2
:	:	:	:
:	:	:	:
:	:	:	:
:	:	:	:

ب طريقة كاوس- سيدل Gauss-Seidel Method أو طريقة جاكوبي المحسنة.
من الممكن تحسين طريقة جاكوبي للحصول على نتائج أفضل وذلك يلاحظ انه لحساب (x^r_1) ولكل قيم (i) فان الكميات x^{r-1} يجب أن تستخدم وبما إن $x^r_1,x^r_2,x^r_3,\ldots\ldots.x^r_{i-1}$ تكون قد حسبت وجاهزة للاستخدام ويفترض أن تعطي نتائج أفضل للحصول على الحل المطلوب $x^r_1,x^r_2,x^r_3,\ldots\ldots.x^r_{i-1}$ الجديدة من الحل القديم لذلك يفضل إن يتم استخدام القيم المحسوبة سابقا لإيجاد القيم الجديدة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

حيث يمكن إعادة صياغة المعادلات الخطية أعلاه بوضع أسلوب تكراري وكما يأتي:-

$$x_1^r = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{\;r-1} - a_{13}x_3^{\;r-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^{\;r} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^r - a_{23}x_3^{r-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^r = \frac{b_3 - a_{31}x_1^r a_{32}x_2^r}{a_{33}}$$

$$r = 0,1,2,3,4,\ldots\ldots$$

وان الشكل العام المستخدم في طريقة كاوس-سيدل هو كالأتي:-

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^r - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$

ثم نختبر مقياس الدقة بالاعتماد على القانون الأتي:-

$$\left\| x^r - x^{r-1} \right\|$$

$$or$$

$$Max\left|(x_3^r - x_3^{r-1}),(x_2^r - x_2^{r-1}),(x_1^r - x_1^{r-1})\right| \prec \in$$

طريقة جاكوبي	طريقة كاوس –سيدل
1 طريقة قديمة وبسيطة	1 طريقة حديثة وهي اسلوب محور عن طريقة جاكوبي.
2 أن القيم الجديدة لا تستخدم إلا بعد أن نحسب جميع قيم المتغيرات.	2 إن القيم الجديد تستخدم بنفس الخطوة بدون انتظار إيجاد باقي القيم الأخرى للمتغيرات
3 نستخدم القانون التالي:- $x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$	3 نستخدم القانون التالي:- $x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^r - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$
4 بطيئة وتمتاز بكثرة التكرارات للصول إلى الدقة المطلوبة.	4 سريعة وتمتاز بقله التكرارات للوصول إلى الدقة المطلوبة

خوارزمية طريقة كاوس- سيدل

- ضع r=1.
- إذا كانت r≤N نلجأ إلى تطبيق الخطوة الثالثة
- $$x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^r - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$
- ثم نختبر مقياس الدقة بالاعتماد على القانون الأتي:-

$$\left\| x^r - x^{r-1} \right\|$$

$$or$$

$$Max\left|(x_3^r - x_3^{r-1}),(x_2^r - x_2^{r-1}),(x_1^r - x_1^{r-1})\right| \prec \in$$

- r=r+1
- إذا لم يتحقق الشرط نكرر العملية من الخطوة 3

ملاحظة1:-
طريقة كاوس- سيدل تقسم إلى طريقتين العامة وطريقة المصفوفات

ملاحظة2:- يجب طريقة كاوس- سيدل إن يحقق شرط الهيمنة القطرية أي بمعنى أن عناصر القطر الرئيسي لا تساوي كمية صفرية

$$|a_{ij}| \succ \sum |a_{ij}|$$

مثال:- باستخدام طريقة كاوس-سيدل جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ علما إن قيمة الخطأ 0.000001

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 12$$

الحل:-
نجد قيمة x_1, x_2, x_3 للتكرار الأول.

$$x_1^1 = b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 / a_{11}$$
$$x_1^1 = \frac{12-0-0}{10} = 1.2$$
$$x_2^1 = b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0 / a_{22}$$
$$x_2^1 = \frac{12-1.2-0}{10} = 1.08$$
$$x_3^1 = b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1 / a_{33}$$
$$x_3^1 = \frac{12-1.2-1.08}{10} = 0.972$$
$$Max|(0.972-0),(1.08-0),(1.2-0)| \prec 0.001$$
$$1.2 \neq \prec 0.001$$

نجد قيمة x_1, x_2, x_3 للتكرار الثاني

$$x_1^2 = b_1 - a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1 / a_{11}$$
$$x_1^2 = \frac{12-1.08-0.972}{10} = 0.9948$$
$$x_2^2 = b_2 - a_{21}x_1^2 - a_{23}x_3^1 / a_{22}$$
$$x_2^1 = \frac{12-0.9948-0.972}{10} = 1.00332$$
$$x_3^1 = b_3 - a_{31}x_1^2 - a_{32}x_2^2 / a_{33}$$
$$x_3^2 = \frac{12-0.9948-1.00332}{10} = 1.000188 \cong 1.00019$$
$$Max|(1.00019-0.972),(1.00332-1.08),(0.9948-1.2)| \prec 0.001$$
$$0.2052 \neq \prec 0.001$$

وهكذا نستمر بالحل إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب وحسب الجدول الأتي:-

r	X^r_1	X^r_2	X^r_3
0	0	0	0
1	1.2	1.08	0.972
2	0.9948	1.0033	1.00019
3	0.99965	1.000016	1.000033
: : :	: : :	: : :	: : :

من الجدول أعلاه نستطيع إن نلاحظ إن التقارب في الطريقة كاوس سيدل أسرع منه في طريقة جاكوبي ففي ثلاثة خطوات حصلنا على نفس الدقة أو ربما أحسن من الدقة التي حصلنا عليها في طريقة جاكوبي بست خطوات.

واجب:-
باستخدام طريقة كاوس-سيدل جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ علما إن قيمة الخطأ 0. 001

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4$$

- طريقة الإرخاء أو التراخي Relaxant method

هذه الطريقة هي تحوير لطريقة كاوس –سيدل حيث تزيد من سرعة اقتراب القيم المنتجة للقيم المضبوطة . حيث إن الفكرة الأساسية للعمل بهذه الطريقة تكون باختيار قيمة مناسبة كحد يسمى حد التصحيح حيث بعد حساب كل قيمة جديدة (x) بطريقة كاوس-سيدل تصحح هذه القيمة بالصيغة التالية:-

$$x_i^{new} = x_i^{old} + \lambda(x_i^{new} - x_i^{old}) = \lambda x_i^{new} + (1-\lambda)x_i^{old}$$

حيث إن عامل التصحيح (λ) تكون قيمته محورة مابين 2 , 0 فإذا كانت قيمة عامل التصحيح وهو λ يساوي:-

- λ=1 فتسمى طريقة كاوس- سيدل غير المحورة.
- $0 < \lambda < 1$ فتسمى طريقة تحت التراخي.
- $1 < \lambda < 2$ فتسمى طريقة فوق التراخي.

ويمكن توضيح الطريقة لثلاث معادلات وكما يأتي:-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

فنعيد صياغة المعادلات الخطية أعلاه مع صيغة التصحيح ووضع الأسلوب التكراري وبالشكل الأتي:-

$$x_1^r = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{\,r-1} - a_{13}x_3^{\,r-1}}{a_{11}}$$
$$x_1^{r*} = x_1^{r-1} + \lambda(x_1^r - x_1^{r-1})$$
$$x_2^{\,r} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{*r} - a_{23}x_3^{r-1}}{a_{22}}$$

$$x_2^{r*} = x_2^{r-1} + \lambda(x_2^r - x_2^{r-1})$$
$$x_3^r = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{r*}a_{32}x_2^{r*}}{a_{33}}$$
$$x_3^{r*} = x_3^{r-1} + \lambda(x_3^r - x_3^{r-1})$$
$$r = 0,1,2,3,4,......$$

ومن اجل الانتقال من التكرار الأول إلى التكرار الثاني سوف يتم استبدال وكالأتي:-

$$x_1^{r-1} = x_1^{r*}, x_2^{r-1} = x_2^{r*}, x_3^{r-1} = x_3^{r*}$$

حيث أن الرمز (*) يمثل القيمة المصححة وان القانون المستخدم لهذه الطريقة بشكل عام هو:-

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^r - \sum_{j=i-1}^{n} a_{ij}x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$
$$x_i^{r*} = x_i^{r-1} + \lambda(x_i^r - x_i^{r-1})$$

ملاحظة:- تحل هذه المنظومة عندما يتحقق شرط الهيمنة القطرية وإذا لم يتحقق ذلك نغير بالمعادلات وإذا غيرنا ولم يتحقق الشرط مرارا نتوقف ويفشل الحل.

مثال:- باستخدام طريقة الارخاء جد الحل للمنظومة المعالات الآتية على فرض إن $(0,0,0,) = (x^0{}_1, x^0{}_2, x^0{}_3)$ علما إن قيمة الخطأ 0.001 وان عامل التصحيح $\lambda = 1.5$

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

حساب التكرار الأول وذلك بالاعتماد على القيم المعطاة بالسؤال $(0,0,0,) = (x^0{}_1, x^0{}_2, x^0{}_3)$

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2{}^{r-1} - a_{13}x_3{}^{r-1}}{a_{11}}$$
$$x_1^1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.617$$
$$x_1{}^{1*} = x_1^0 + \lambda(x_1^1 - x_1^0)$$
$$x_1^{1*} = 0 + 1.5(2.617 - 0) = 3.9251$$
$$x^1{}_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{*1} - a_{23}x_3^0}{a_{22}}$$
$$x_2^1 = \frac{(-19.3 - 0.1(3.9251) + 0.3(0))}{7} = -2.8132$$
$$x_2^{1*} = x_2^0 + \lambda(x_2^1 - x_2^0)$$
$$x_2^{1*} = 0 + 1.5(-2.8132 - 0) = -4.2198$$

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{1*}a_{32}x_2^{1*}}{a_{33}}$$

$$x_3^1 = \frac{(71.4 - 0.3(3.9251) + 0.2(-4.2198)}{10} = 6.9379$$

$$x_3^{1*} = x_3^0 + \lambda(x_3^1 - x_3^0)$$

$$x_3^{1*} = 0 + 1.5(6.9379 - 0) = 10.40685 \cong 10.4069$$

$$x_1^1 = 2.617 \rightarrow x_1^{1*} = 3.9251$$

$$x_2^1 = -2.8132 \rightarrow x_2^{1*} = -4.2198$$

$$x_3^1 = 6.9379 \rightarrow x_3^{1*} = 10.4069$$

$$Max\left|(x_1^{1*} - x_1^0), \left(x_2^{1*} - x_2^0\right), \left(x_3^{1*} - x_3^0\right)\right| \prec 0.001$$

$$Max\left|3.9251, -4.2198, 10.4069\right| \prec 0.001$$

$$10.4069 \neq\prec 0.001$$

حساب التكرار الثاني وذلك بالاعتماد على القيم التي تم الحصول عليها من التكرار الأول

$$x_1^2 = \frac{b_1 - a_{12}x_2{}^1 - a_{13}x_3{}^1}{a_{11}}$$

$$x_1^2 = \frac{7.85 + 0.1(-4.2198) + 0.2(10.4069)}{3} = 3.1698$$

$$x_1{}^{2*} = x_1^1 + \lambda(x_1^2 - x_1^1)$$

$$x_1^{2*} = 3.9251 + 1.5(3.1698 - 3.9251) = 2.7921$$

$$x^2{}_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{*2} - a_{23}x_3^1}{a_{22}}$$

$$x_2^2 = \frac{(-19.3 - 0.1(2.7921) + 0.3(10.4069)}{7} = -2.351$$

$$x_2^{2*} = x_2^1 + \lambda(x_2^2 - x_2^1)$$

$$x_2^{2*} = -4.2198 + 1.5(-2.351 - (-4.2198) = -1.4166$$

$$x_3^2 = \frac{71.4 - 0.3(2.7921) + 0.2(-1.4166)}{10} = 7.0279$$

$$x_3^{2*} = x_3^1 + \lambda(x_3^2 - x_3^1)$$

$$x_3^{2*} = 10.4069 + 1.5(7.0279 - 10.4069 = 5.338$$

$$x_1^2 = 3.1698 \rightarrow x_1^{2*} = 2.7921$$

$$x_2^2 = -2.351 \rightarrow x_2^{2*} = -1.4166$$

$$x_3^2 = 7.0279 \rightarrow x_3^{2*} = 5.338$$

$$Max\left|(x_1^{2*} - x_1^2), (x_2^{2*} - x_2^2), (x_3^{2*} - x_3^2)\right| \prec 0.001$$

$$Max\left|-1.133, 2.8032, -5.0639\right| \prec 0.001$$

$$5.0639 \neq\prec 0.001$$