ENGINEERING ANALYSIS

جامعة الموصل
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية
المرحلة الثالثة
إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد
2024-2023

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Contents

Second order linear Diff. Equ.

$$y=F(x)\rightarrow\frac{dy}{dx}$$

$$y=F(x,t)=\frac{dy}{dx},\frac{dy}{dt}$$

$$y''+p(x)\,y'+g(x)y=r(x)$$

where p(x) , q(x) and r(x) are functions of x only.

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Examples:-

$y''+x^2\,y'+6y=e^x$

linear – Non homogenous

$yy''+x^3\,y'+(x-1)y=\sin x$

Non linear – Non homogenous

$y''+\sqrt{(x^2+2)}\;y'+4y=0$

linear – homogenous

if r(x) = 0 → Homogeneous.
If r(x) ≠ 0 Non homogenous

P(x) & q(x) Coefficients of equation.

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

$y''+ay'+by=0$

(homogenous – second order linear D. E with constant) coefficients.

$y = e^{\alpha x}$

$y'' = \alpha\, e^{\alpha x}$

$y'' = \alpha^2\, e^{\alpha x}$

$\alpha^2\, e^{\alpha x} + a\,\alpha\, e^{\alpha x} + b\, e^{\alpha x} = 0$

$(\alpha^2 + a\,\alpha + b)\, e^{\alpha x} = 0$

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ **characteristic equation.**

$$\alpha=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left[-a+\sqrt{a^2-4b}\right],\alpha_2=\frac{1}{2}\left[-a-\sqrt{a^2-4b}\right]$$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

1- Two real roots

α_1 , α_2

$y= c_1 e^{\alpha 1x} + c_2 e^{\alpha 2x}$

Example :

$y'' + y' - 2y = 0$

$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$

$\alpha_1 = -2 , \alpha_2 = 1$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

$y''+ay' + by = 0$

$y = e^{\alpha x}$ $\quad y' = \alpha e^{\alpha x}$ $\quad y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\alpha^2 e^{\alpha x} + a \alpha e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0$

$(\alpha^2 + a \alpha + b) e^{\alpha x} = 0$

$\alpha^2 + a \alpha + b = 0$

المعادلة المميزة الخاصة بالحل

characteristic equation

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

2- Complex roots

$a^2 - 4b < 0 \quad = -\ w^2 \qquad \sqrt{-w^2} = wi \qquad \alpha_{1,2} = \frac{-a \pm wi}{2} = -\bar{a} \pm \bar{w}i$

$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$y = e^{-ax}$ (A cos wx + B sin wx) **general solution**

الحل العام عندما يكون بالمعادلة ثوابت (A, B)

إذا لم يوجد شروط الحل

الشروط

$y'(0) = 1$, $y(0) = 4$

at (x=0) at (x=0)

dy / dx = 1 y = 4

* عدد الثوابت يجب أن يساوي مرتبة المعادلة ولدينا من المرتبة الثانية ثوابت أثنان هم (A,B)

y (0) = 4

$4 = e^o$ (A cos 0 + B sin 0)

4 = 1(A+0)

A = 4

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

3-Double roots

$\alpha_1 = \alpha_2 = - a$

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-ax}$

Example :

$y'' + 8y' + 16y = 0$

Solution :-

$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

$(\lambda + 4)(\lambda + 4) = 0$

$\lambda_1 = -4 \ , \lambda_2 = -4$

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-4x}$ **general solution**

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

3-Double roots

Find the particular solution

if $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$

$y'(0) = 3$, $3 = (c_1 + c_2 * 0)\, e^{-ax0}$

$dy/dx = (c_1 + c_2\, x) * -4e^{-4x} + e^{-4x}\,(c_2)$

$1 = (c_1 + 3 * 0) * -4e^{-4x0} + e^{-4x0}\,(c_2)$

$1 = -4c_1 + c_2$

$1 = -4 \times 3 + c_2$

$c_2 = 13$

$y = (3 + 13x)\, e^{-4x}$ **particular solution**