أنظمة الأعداد

المرحلة الأولى

قسم الصحة البيئية

2-1 مقدمة Introduction
إن من أفضل الطرق لفهم أى شيء جديد هو مقارنته بشيء معروف لدينا وبالتالي تظهر لنا الاختلافات. في هذه الوحدة سوف نتناول دراسة النظام الثنائي للأعداد (Binary Number System) والذي يعتبرمن أهم النظم المستخدمة في الدوائر الإلكترونية الرقمية وتمثيل البيانات في الحاسبة (Digital Electronic Circuits).

ولكي نتمكن من فهم هذا النظام العددي الجديد، سوف نقوم بمقارنته بالنظام العشري للأعداد (Decimal Number System) المالوف لدينا. وبالإضافة إلى النظام الثنائي للأعداد هناك نظامان عدديان آخران يستخدمان بكثرة في الالكترونيات الرقمية هما النظام الثماني للإعداد (Octal Number System) والنظام السداسي عشري (Hexadecimal Numbering System).

وتستخدم الأعداد الثنائية على نطاق واسع في الالكترونيات الرقمية والحاسبات كما تستخدم نظم الأعداد الثمانية والسداسي عشرية في تمثيل مجموعات الأرقام الثنائية. ويمكننا استخدام كل النظم العددية المذكورة سابقا في الحسابات وكلها تعتمد على القيم وأماكن الخانات في الأعداد. عند دراستنا للنظام الثنائي سنتناول فيه دراس الخواص الآتية:

1- أساس النظام.
2- الرموز المستخدمة في النظام.
3- التحويل من النظام العشري الى النظام الثنائي.
4- التحويل من النظام الثنائي الى النظام العشري
5- عمليات الجمع والطرح الخاصة بهذا النظام.

وقبل ان نتناول نظام الاعداد الثنائية يجب ان نفرق بين مصطلحين هامين هما الرقم (Digit) والعدد (Number)، فالرقم هو قيمة رمز (Symbol) واحد من الرموز الأساسية للإعداد والذي يحتل خانة واحدة، فالأرقام (0.1.2.3.4. .... 8.9) كل واحد منها يمثل رقم واحد في سلسلة العدد الواحد، أما العدد فهو المقدار الذي يتكون من رقم واحد أو أكثر أو انه المقدار الذي يمثل خانة واحدة أو أكثر، فعلى سبيل المثال المقدار (14) يمثل عدداً وكذلك المقدار (123) يمثل عدداً، وفي المقدار الأول فان العدد (14) يتكون من رقمين هما (1,4) وفي المقدار الثاني فان العدد (123) يتكون من ثلاثة أرقام هي (1,2,3) ويمكن أن يكون رقم (6) مثلاً عدد إذا كانت سلسلته تتكون من رقم واحد.

2-2 النظام العشري للأعداد
نظراً لأن النظام هو الأقدم استخداماً ومألوف لدينا لذا فإننا سنبدأ بدراسته كتمهيد لدراسة كل النظم العددية الأخرى. ويطلق على النظام العشري اسم نظام الأساس عشرة (10) أو منظومة الأساس 10 ويشار إليه بالأساس (10) لأنه يعتمد في تكوينه على عشرة رموز مختلفة وهي (0.1.2.3.4.5.6.7.8.9).

وللنظام العشري خاصية مرتبة الرقم (Positional Weight) فعلى سبيل المثال العدد (128) نجد أن الرقم الأول (8) يقع في المرتبة الأولى (مرتبة خانة الآحاد) أي أن قيمته أو وزنه هو الثمانية، وتكون عبارة عن حاصل ضرب الرقم الذي يحتل المرتبة في 1(8=1×8)، أما الرقم الثاني (2) فانه يقع في المرتبة الثانية (مرتبة العشرات) وقيمته أو وزنه عبارة عن حاصل ضرب الرقم الذي يحتل هذه المرتبة في

10(2×10=20)، أما الرقم الثالث (1) فانه يقع في المرتبة الثالثة (مرتبة المئات) وقيمته أو وزنه عبارة عن حاصل ضرب الرقم الذي يحتل هذه
الخانة في 100(1×100=100) فإذا جمعنا قيمة أو وزن كل خانة من الخانات السابقة نحصل على القيمة التي يمثلها العدد، أي أن:

(1X100)+(2X10)+(8X1)= 100+20+8= 128

وحيث أن هذا النظام يعرف باسم نظام الأساس (10) فانه يمكننا أن نضع مراتب الخانات من اليسار الى اليمين بحيث تمثل قوى العدد أو الأساس 10 وتبدأ كالاتي

10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5..................

2-3 النظام الثنائي للأعداد

يطلق على النظام الثنائي اسم نظام الأساس اثنين (2) ويشار إليه بالأساس (2) لأنه يعتمد على رمزين اثنين فقط هما (0.1) ومراتب الخانات في النظام الثنائي من اليسار الى اليمين تمثل قوى العدد (2) أي أن:

2^0 2^1 2^2 2^3 2^4...........................

وبالتالي فأن مراتب الخانات أو أوزانها العددية هي:

1 2 4 8 16..................

وعلى ذلك فان العدد الثنائي (11001) يكافئ ما يلي:

2^0 2^1 2^2 2^3 2^4

1 0 0 1 1 ← عكس الرقم ليصبح

$(2^0\times1)+(2^1\times0)+(2^2\times0)+(2^3\times1)+(2^4\times1) = 1+0+0+8+16=25_{(10)}$

والتعبير عن العدد الثنائي بهذه الطريقة يسمى بالشكل الموسع، ولتمييز العدد الثنائي عن غيره من الاعداد يوضع العدد الثنائي داخل قوسين ثم يكتب الأساس (2) على يمين العدد في الأسفل وبالتالي فان العدد السابق يكتب $(11001)_2$.

وهناك بعض المصطلحات المستخدمة مع هذا النظام الثنائي منها:

- الخانة الثنائية (Bit): الخانة الثنائية (Bit) هي اختصار لكلمتي (Binary Digit) والتي تعني الخانة الثنائية أو الرقم الثنائي. ويستخدم هذا المصطلح للتعبير عن عدد الأرقام (الخانات) التي يتكون منها العدد الثنائي، فمثلاً العدد $(1001)_2$ يتكون من (4-bits) أو أربع خانات ثنائية وكذلك العدد $(1101101)_2$ يتكون من (7-bits) أو سبع خانات ثنائية وهكذا.
- أهمية رتبة الخانة الثنائية (Bit): في أي تشكيلة من التشكيلات الثنائية المحتملة لأي عدد من الخانات نجد أن الخانة الأولى في اليسار تحت مرتبة 2^0 أي تساوي (1) أويقال وزنها يساوي (1) وأن الخانة الثانية والتي على يمين الأولى تحت مرتبة 2^1 أي وزنها يساوي (2) والثالثة تحت مرتبة 2^2 أي وزنها يساوي (4) وهكذا. وبذلك نجد أن الخانة الثنائية الأولى التي في أقصى اليمين اقل وزناً وان الخانة الأخيرة وهي أخر خانة على اليسار هي الأكبر وزناً، ولذلك يطلق على الخانة الثنائية الأولى، الخانة الأقل وزناً أو الأقل قيمة (<u>L</u>east <u>S</u>ignificant <u>B</u>it) وتكتب اختصاراً (LSB) ويطلق على الخانة الثنائية الأخيرة في أقصى اليسار الخانة الأكبر وزناً أو الأعلى قيمة (<u>M</u>ost <u>S</u>ignificant <u>B</u>it) وتكتب اختصاراً (MSB).
- وحدة تخزين البيانات (Byte): تعتبر الخانة الثنائية (Bit) بت هي الوحدة الأساسية لتخزين المعلومات في الذاكرة الرئيسية لجهاز الحاسوب، لكن الخانة الثنائية الواحدة لا تعطي تشكيلات غير الصفر (0) والواحد (1) لذلك لايمكن استخدامها في تمثيل (أو تخزين) أي من الأرقام العشرية الأساسية أو حروف

الهجاء أو الرموز الخاصة. وللقيام بهذه العملية تم استخدام عدة خانات ثنائية متجاورة لتكون كوحدة تخزين لها القدرة على إعطاء تشكيلات كثيرة تكون قادرة على تمثيل أو تخزين أي رقم عشري أساسي أو أي حرف هجاء أو أي رمز خاص.

بَايت
لذلك فإن وحدة تخزين البيانات (Byte) تتكون من ثماني خانات ثنائية متجاورة وبالتالي يمكن تعريف وحدة تخزين البيانات على إنها موقع في الذاكرة الرئيسية للحاسوب تحتوي على ثماني خانات ثنائية متجاورة.
وبصيغة المعادلة الرياضية يمكن القول ان: 1 byte = 8 bits

2-4 التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي
بَايت

هناك طريقتان للتحويل من النظام العشري إلى الثنائي، الطريقة الأولى وهي طريقة جمع الأوزان (Sum of Weights Method) والطريقة الثنائية يطلق عليها طريقة تكرار القسمة على (2) (Repeated Division by 2 Method) وسوف نتناول بالتفصيل الطريقة الثانية حيث أنها الأسهل والأكثر شيوعاً في الاستخدام.

2-4-1 تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثنائي

لتحويل العدد العشري $(14)_{10}$ إلى الثنائي، نبدأ بقسمة العدد 14 على 2، ثم نقسم نَاتِج القسمة الذي نحصل عليه على 2 وهكذا حتى نحصل على نَاتِج قسمة يساوي صفر (0). في كل خطوة من خطوات القسمة نحصل على باقي من نَاتِج القسمة وهو الذي يشكل العدد الثنائي. الباقي الأول الذي نحصل عليه يمثل (LSB) في العدد الثنائي والباقي الأخير يمثل (MSB)، وهذه الخطوات يمكن توضيحها كالآتي:

	الباقي
$14 \div 2 = 7$	0
$7 \div 2 = 3$	1
$3 \div 2 = 1$	1
$1 \div 2 = 0$	1

1 1 1 0

(MSB)   (LSB)

وعلى ذلك يكون:

$1110_{(2)} = 14_{(10)}$

مثال (2-1): حول العدد العشري $(25)_{10}$ إلى مكافئة الثنائي.

الحل:

	الباقي	
$25 \div 2 = 12$	1	LSB
$12 \div 2 = 6$	0	
$6 \div 2 = 3$	0	
$3 \div 2 = 1$	1	
$1 \div 2 = 0$	1	MSB

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$11001_{(2)} = 25_{(10)}$

2-4-2 تحويل الأعداد الكسرية إلى النظام الثنائي

كما رأينا سابقاً انه يمكننا تحويل الاعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثنائي عن طريق تكرار القسمة على (2). والأعداد الكسرية (Decimal Fraction) نستطيع تحويلها إلى النظام الثنائي على طريق الضرب المتكرر في (2).

ولتحويل العدد الكسري (0.3125) إلى النظام الثنائي نبدأ بضرب العدد الكسري (0.3125) في (2)، ثم نبدأ بضرب العدد الكسري الناتج مرة أخرى في (2) حتى يصبح العدد الكسري الناتج يساوي صفر (0) أو حتى نصل إلى العدد المطلوب من الخانات العشرية. الأرقام الحاملة (Carried Digits) الناتجة من حاصل الضرب المتكرر والموجودة على يسار الفاصلة العشرية تكون لنا العدد الكسري الثنائي. الرقم الحامل الأول يمثل (MSB) والرقم الحامل الأخير يمثل (LSB). وهذه العملية يمكن تمثيلها كما يلي:

$0.3125 \times 2 = 0.625$	0
$0.625 \times 2 = 1.25$	1
$0.25 \times 2 = 0.5$	0
$0.5 \times 2 = 1,00$	1

0 1 0 1

(LSB) (MSB)

مثال (2-2): حول العدد العشري $(39.25)_{10}$ إلى نظيره الثنائي.

الحل: نبدأ أولا بتحويل العدد العشري الصحيح وذلك بتكرار القسمة على (2) كما يلي:

	الباقي	
$39 \div 2 = 19$	1	LSB
$19 \div 2 = 9$	1	
$9 \div 2 = 4$	1	
$4 \div 2 = 2$	0	
$2 \div 2 = 1$	0	
$1 \div 2 = 0$	1	MSB

ويكون الناتج كما يلي:

$100111_{(2)} = 39_{(10)}$

ثم نبدأ بتحويل العدد الكسري وذلك بتكرار الضرب في (2) كما يلي:

	الحامل	
$0.25 \times 2 = 0.5$	0	MSB
$0.5 \times 2 = 1.00$	1	LSB

وبذلك نحصل على : $(0.25)_{10} = (0.01)_2$

ويكون الناتج النهائي للعدد المطلوب هو: $(39.25)_{10} = (100111.01)_2$

2-4-3 التحويل من النظام الثنائي إلى العشري

العدد الثنائي كما علمنا من قبل له مراتب في الخانات من اليسار الى اليمين تمثل قوى العدد (2) وبالتالي فان مراتب الخانات أو أوزانها العددية وهي 1,2,4,8,16,32,64,128,256 وهكذا قيمة العدد الثنائي معبراً عنها بالعدد العشري المكافئ يمكن حسابها عن طريق ضرب كل خانة (Bit) تساوي الواحد (1) في مرتبة الخانة المقابلة لها وبجمع حاصل الضرب لكل خانة على العدد المكافئ المطلوب. ويمكن توضيح عملية التحويل بالمثال التوضيحي التالي:

مثال (2-3): حول العدد الثنائي 1101001 إلى نظيره العشري.

الحل: نحدد مرتبة كل خانة تساوي (1) ثم نقوم بضربها في الوزن المقابل لها ونجمع حواصل الضرب كما يلي:

الــوزن: 2^0 2^1 2^2 2^3 2^4 2^5 2^6

العدد الثنائي: 1 0 0 1 0 1 1 ← **ملاحظة: الخطوة الأولى نعكس العدد (العدد الصحيح) قبل وضع الاوزان ليصبح**

$$(2^0x1) + (2^1x\,0) + (2^2x0) + (2^3x1) + (2^4x0) + (2^5x1) + (2^6x1) = 1+0+0+8+0+32+64 = 105_{(10)}$$

والأعداد الكسرية في الاعداد الثنائية يمكن تحويلها أيضا وذلك بوضع خانات (Bits) على يمين العلامة الثنائية (Binary Point) تماماً كما في الاعداد الكسرية بالنظام العشري والتي توضع أيضاً على يمين العلامة العشرية (Decimal Point) وبالتالي فان مراتب الخانات أو أوزانها العددية في النظام الثنائي تصبح كما يلي:

2^{-4} 2^{-3} 2^{-2} 2^{-1} 2^0 , 2^1 2^2 2^3 2^4....

الفارزة الثنائية

مثال (2-4): حول العدد الكسري الثنائي $(0.1011)_2$ إلى مكافئة العشري.

الحل:

2^{-1} 2^{-2} 2^{-3} 2^{-4}

0 . 1 0 1 1 ← **ملاحظة: لايعكس العدد (العدد الكسر) عند تحويل الكسور من الثنائي الى العشري**

. -1 . . -2 . . -3 . . -4 .

$$(2^{-1}x1) + (2^{-2}x0) + (2^{-3}x1) + (2^{-4}x1) = 0.5 + 0 + 0.125 + 0.0625 = 0.6875_{(10)}$$

علماً ان: $2^{-1} = 0.5$ // $2^{-2} = 0.25$ // $2^{-3} = 0.125$ // $2^{-4} = 0.0625$ // $2^{-5} = 0.01325$

2-5 العمليات الحسابية في النظام الثنائي

العمليات الحسابية في النظام الثنائي ضرورية في كل أجهزة الحاسوب وأنواع أخرى عديدة من النظم الرقمية. وسنكتفي هنا بشرح القواعد الأساسية لعمليتي الجمع والطرح فقط.

2-5-1 الجمع الثنائي

لإجراء عملية الجمع في النظام الثنائي، هناك أربعة قواعد أساسية لجمع الخانات الثنائية (Binary Digits) هي :

$0 = 0 + 0$

$1 = 1 + 0$

$1 = 0 + 1$

$1 + 1 =$ carry0 (الحامل) $1 \Rightarrow = 10$

لاتحتاج القواعد الثلاثة الأولى إلى مزيد من الإيضاح، والقاعدة الرابعة تقول إنه في حالة جمع 1+1=10 وهي تعني رقم (2) بالعشري، والواحد (1) هو المجموع الواجب ترحيله إلى العمود التالي كما في الجمع العشري العادي. ولتوضيح عملية الجمع الثنائي نأخذ المثالين التاليين.

مثال (2-5): اجمع الرقمين الثنائيين 110، 011.

الحل: نرتب الاعداد الثنائية بحيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة كما يلي:

				1	1	
	6			1	1	0
	+ 3	+		0	1	1
(عشري)	9		1	0	0	1

مثال (2-6): اجمع الرقمين الثنائيين 100، 011.

الحل:

	4	1	0	0
	+ 3	0	1	1
(عشري)	7	1	1	1

2-5-2 طرح الاعداد الثنائية (Binary Subtraction):

لإجراء عملية الطرح في النظام الثنائي، هناك أربعة قواعد أساسية لطرح الخانات الثنائية هي:

$\longleftarrow$

0=1-1

1=0-1

1=1-0 (with a borrow of 1)

0=1-1

مثال (1):

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 0100\ - \\ \hline 1001 \end{array}$$

1101 - 0100 = ???

مثال (2):

$$\begin{array}{r} \boxed{10} \quad \boxed{10_{(2)}=2_{(10)}} \\ 111\cancel{1}011.11 \\ 1010101.10\ - \\ \hline 0100110.01 \end{array}$$

1111011.11 - 1010101.10 = ???

مثال (3):

$$101100.011 - 011010.101 =$$

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1} \\
{\scriptstyle 0\,2\;\;0\,\cancel{2}\,\cancel{2}\;\;2} \\
101\cancel{1}00.011 \\
-\;011010.101 \\
\hline
010001.110
\end{array}$$