Lecture one

Differential Equations المعادلات التفاضلية

وهي المعادلات التي تتكون من متغير اساسي واحد ومتغير غير اساسي واحد مثل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2}{1 - y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = k\frac{dy}{dx}$$

Order and Degree of Differential Equations

Order هي مرتبة المعادلة التفاضلية وهي قيمة أعلى مشتقة

Degree هي درجة المعادلة التفاضلية وهي الدرجة الموجودة على اكبر مشتقة (اي اس اكبر مشتقة)

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E\sin t$$

$$Degree = 1$$

$$Order = 2$$

----------Dr. Tahseen Gelmiran

Formation of Differential Equations تكوين المعادلات التفاضلية

يتم تكوين المعادلة التفاضلية من خلال اشتقاق المعادلة الاعتيادية لعدد من المرات مساوي لعدد الثوابت التي تتضمنها المعادلة التفاضلية بحيث يكون الناتج النهائي معادلة تفاضلية خالية من الثوابت ومرتبتها order مساوي لعدد الثوابت.

Example

From the differential equation in the following cases and also write the order and degree

1) $y = Ax + A^2$

$$\frac{dy}{dx} = A \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = A^2$$

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$order = 1 \quad , \quad deqree = 2$$

2) $y = A\,cosx + B\,sinx$

$$\frac{dy}{dx} = -A\,sinx + B\,cosx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\,cosx - B\,sinx = -(A\,cosx + B\,sinx) = -y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$$order = 2 \quad , \quad degree = 1$$

----------Dr. Tahseen Gelmiran

3) $y^2 = A\,x^2 + B\,x + c$

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 2A\,x + B$$

$$2y\,.\;\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx}\,.\;\frac{dy}{dx} = 2\,A$$

$$2y\,\frac{d^3y}{dx^3} + 2\,\frac{d^2y}{dx^2}\,.\,\frac{dy}{dx} + 2\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$y\,\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$y\,\frac{d^3y}{dx^3} + 3\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$order = 3$$

$$degree = 1$$

Solution of Differential Equations

Differential Equations of First Order and First Degree

حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى و الدرجة الاولى

يتم حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى باستخدام احد الطرق التالية:

1. **Separation of Variables** **فصل المتغيرات**
2. **Homogeneous Equations** **المعادلات المتجانسة**
3. **Linear Equations** **المعادلات الخطية**
4. **Exact Equations** **المعادلات التامة**

Separation of Variables فصل المتغيرات

يمكن حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة فصل المتغيرات في حالة الحصول على الصيغة التالية:

$$\int f(y)\,dy = \int \emptyset(x)\,dx$$

اي اذا تمكنا من فصل المتغير y مع dy والمتغير x مع dx يمكن الحل بهذه الطريقة.

Example

Solve $(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$

$$(x+1)\,dy = x(y^2+1)\,dx$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x\,dx}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx \qquad \rightarrow \int \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\tan^{-1} y = x - \ln(x+1) + c$$

Example

Solve

$$(x\,y^2 + x)\,dx + (y\,x^2 + y)\,dy = 0$$

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{2}c$$

$$\ln(x^2+1) + \ln(y^2+1) = c$$

$$\ln(x^2+1)(y^2+1) = c$$

Example

Solve $(x^2 - ay)dx = (ax - y^2)\,dy$

$$x^2\,dx - a\,y\,dx = a\,x\,dy - y^2\,dy$$

$$x^2\,dx + y^2 dy = a\,x\,dy + a\,y\,dx$$

$$\int x^2\,dx + \int y^2\,dy = a\int (x\,dy + y\,dx)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = axy + c$$

$$x^3 + y^3 = 3axy + 3c$$

Example

Solve $y\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\,dy + x\sqrt{1 + y^2}\,dx = 0$

$$\frac{y\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{dx} + \frac{x\sqrt{1 + y^2}}{dy} = 0$$

$$\frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x\,dx} = -\frac{\sqrt{1 + y^2}}{y\,dy} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} = -\frac{y\,dy}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$x\,(1 + x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx = -y\,(1 + y^2)^{\frac{-1}{2}}\,dy$$

$$2x\,(1 + x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx = -2y\,(1 + y^2)^{\frac{-1}{2}}\,dy$$

$$\int 2x\,(1 + x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx = -\int 2y\,(1 + y^2)^{\frac{-1}{2}}\,dy$$

$$2\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = -2\,(1 + y^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

Example

Solve $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} + x^2 e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} + \frac{x^2}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + x^2}{e^y}$$

$$e^y dy = e^x dx + x^2 dx$$

$$\int e^y \, dy = \int e^x \, dx + \int x^2 \, dx$$

$$e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$$