Lecture two

المعادلات التفاضلية المتجانسة Homogeneous Differential Equations

وهي المعادلات التي تكون بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{\emptyset(x,y)}$$

وتسمى المعادلة التفاضلية متجانسة اذا كان كل حد من حدود البسط والمقام لها نفس الدرجة كما في الثال التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + y^2}{3x^2 + xy}$$

اي ان مجموع الاس في البسط يساوي مجموع الاس في المقام وبهذه الحالة يكون:

$$y = Vx$$

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$$

وبالتعويض عن قيمة y ومشتقتها في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على معادلة تفاضلية بدلالة x و V يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.

----------Dr. Tahseen Gelmiran

Example

Solve $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

$$(x^2 + y^2)dx = 2xy\,dy \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$y = Vx \quad , \quad \frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$$

$$V + x\frac{dV}{dx} = \frac{x^2 + V^2x^2}{2x^2V} = \frac{x^2(1 + V^2)}{2x^2V} = \frac{1 + V^2}{2V}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{1 + V^2}{2V} - V \quad \rightarrow \quad x\frac{dV}{dx} = \frac{1 - V^2}{2V}$$

$$\int \frac{2V}{1 - V^2}\,dV = \int \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad -ln\,(1 - V^2) = ln\,x + ln\,c$$

$$ln\,\frac{1}{1 - V^2} = ln\,cx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 - V^2} = cx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = cx$$

$$\frac{x^2}{x^2 - y^2} = cx \quad \rightarrow \quad x^2 = cx\,(x^2 - y^2)$$

$$x = c\,(x^2 - y^2)$$

----------Dr. Tahseen Gelmiran

Example

Solve $(2xy + x^2)\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 2xy$

$$(2xy + x^2)\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 2xy \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 + 2xy}{2xy + x^2}$$

$$y = Vx \quad , \quad \frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$$

$$V + x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2x^2 + 2Vx^2}{2x^2V + x^2} = \frac{x^2(3V^2 + 2V)}{x^2(2V + 1)}$$

$$V + x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2 + 2V}{2V + 1} \quad \rightarrow \quad x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2 + 2V}{2V + 1} - V$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{3V^2 + 2V - V(2V + 1)}{2V + 1} \quad \rightarrow \quad x\frac{dV}{dx}$$

$$= \frac{3V^2 + 2V - 2V^2 - V}{2V + 1}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{V^2 + V}{2V + 1} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{dx} = \left(\frac{V^2 + V}{2V + 1}\right)\frac{1}{dV}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2V + 1}{V^2 + V}dV$$

$$\int \frac{2V + 1}{V^2 + V}dV = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln\,(V^2+V) = ln\,x + ln\,c \qquad \rightarrow ln\,(V^2+V) = ln\,cx$$

$$V^2 + V = cx$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = cx$$

$$y^2 + xy = c\,x^2$$

Example

Solve $x\,(y-x)\frac{dy}{dx} = y\,(y+x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(y+x)}{x\,(y-x)} = \frac{y^2+xy}{xy-\,x^2}$$

$$y = Vx \quad , \quad \frac{dy}{dx} = V + x\,\frac{dV}{dx}$$

$$V + x\,\frac{dV}{dx} = \frac{Vx\,(Vx+x)}{x\,(Vx-x)} = \frac{V^2\,x^2 + V\,x^2}{V\,x^2 - \,x^2} = \frac{V\,x^2\,(V+1)}{x^2\,(V-1)}$$

$$V + x\,\frac{dV}{dx} = \frac{V\,(V+1)}{V-1} \qquad \rightarrow \qquad x\,\frac{dV}{dx} = \frac{V^2+V}{V-1} - V$$

$$x\,\frac{dV}{dx} = \frac{V^2+V-\,V^2+V}{V-1} = \frac{2V}{V-1}$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{2V}{V-1} - \frac{1}{dV} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{(V-1)\,dV}{2V}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{V}{2V}\,dV - \frac{1}{2V}\,dV$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int dV - \frac{1}{2}\int \frac{dV}{V}$$

$$ln\,x = \frac{1}{2}\,V - \frac{1}{2}\,ln\,V + c$$

$$ln\,x = \frac{1}{2}\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\,ln\,\frac{y}{x} + c$$