-------------- **Lecture three** --------------

Linear Differential Equations **المعادلات التفاضلية الخطية**

وهي المعادلات التي تكون من المرتبة الاولى والدرجة الاولى وتكون صيغتها النهائية بالشكل التالي:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + Py = Q} \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

حيث ان كل من P و Q هي دالة ل x فقط وليس ل y أو تكون ثابت و يجب توفر الشروط التالية لكي تكون المعادلة التفاضلية خطية:

1. **ان تكون المشتقة من المرتبة الاولى و الدرجة الاولى**
2. **ان تكون y مرفوعة للاس 1**
3. **ان لا تكون Q أو dy/dx أو Py مضروبة بأي مشتقة اخرى أو في y**

Example

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^2$$ معادلة تفاضلية خطية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xp = 10$$ ليست معادلة خطية تفاضلية

لان المشتقة مرفوعة للاس 2

--**Dr. Tahseen Gelmiran**

$$\frac{dy}{dx} + y = xy$$

ليست معادلة تفاضلية خطية لان Q مضروبة ب y

$$\frac{dy}{dx} + x\,y^2 = \sin x$$

ليست معادلة تفاضلية خطية لان y^2 وليس y

ولحل المعادلات التفاضلية الخطية يضرب طرفي المعادلة بما يسمى بمعامل التكامل Integration Factor

$$Integration\ Factor\ (I.F.) = e^{\int P\,dx}$$

فتصبح معادلة (1) بالشكل التالي:

$$e^{\int P dx}\left(\frac{dy}{dx} - Py\right) = Q\,e^{\int P\,dx}$$

وبتكامل طرفي المعادلة ينتج:

$$y\,.\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,.\,e^{\int P\,dx}\,.\,dx + c$$

اي ان الحل النهائي يكون بالشكل التالي:

$$\boxed{y\,.\,(I.\ F.) = \int Q\,.\,(I.\ F.)\,.\,dx + c}$$

حيث ان كل من P و Q هي دالة ل y

--Dr. Tahseen Gelmiran

Example

Solve $x\,\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} . y = x$$

$$y . (I.F.) = \int Q . (I.F.) . dx + c$$

$$I.F. = e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{-3}{x} dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3}$$

$$y . \frac{1}{x^3} = \int x . \frac{1}{x^3} . dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = \int \frac{1}{x^2} . dx + c = \int x^{-2} . dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = \frac{-1}{x} + c \qquad \rightarrow \qquad y = -x^2 + c\,x^3$$

--Dr. Tahseen Gelmiran

Example

Solve $\frac{dy}{dx} + 2y\,tanx = sinx$

$$I.F. = e^{2\int tanx\,dx} = e^{2\,ln\,sec\,x} = e^{ln\,sec^2 x} = sec^2 x$$

$$y\,.\,sec^2 x = \int sec^2 x\,.\,sinx\,.\,dx + c = \int \frac{1}{cos^2 x}\,.\,sinx\,.\,dx + c$$

$$= \int \frac{1}{cosx}\,.\,\frac{sinx}{cosx}\,.\,dx + c = \int secx\,.\,tanx\,.dx + c$$

$$y\,.\,sec^2 x = secx + c$$

Example

Solve $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$

$$I.F. = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{ln\ x} = x$$

$$y\,.\,(I.F.) = \int Q\,.(I.F.)\,.\,dx + c$$

$$y\,.\,x = \int e^{x^2}\,.x\,.\,dx + c$$

$$y\,.\,x = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,.2x\,.\,dx + c$$

$$y\,.\,x = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + c$$

---Dr. Tahseen Gelmiran