الميكانيك

المتجهات Vectors

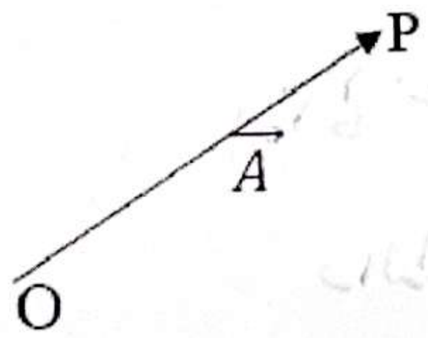
*الكميات العددية والإتجاهية المتجهات Scalar and Vector Quantities

تصنف الكميات الفيزيائية إلى صنفين هما:

1- الكميات العددية Scalar: وهي الكميات التي تعيين تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها فقط، والتي يتحدد مقدارها بذكر عدد تليه وحدة قياس مناسبة ومن الأمثلة الشائعة لهذه الكميات الزمن والكثافة ودرجة الحرارة والشحنة والكتلة ... الخ، وليس هناك صعوبة بالتعامل مع الكميات العددية إنها تخضع عند الجمع والطرح والضرب والقسمة لجميع القوانين المألوفة في الجبر.

2- الكميات الإتجاهية Vector: وهي الكميات الفيزيائية التي يلزم تعيينها بصورة كاملة معرفة كل من مقدارها وإتجاهها، والتي لا تخضع لقواعد الجبر البسيطة بل تخضع لجبر المتجهات، ومن أمثلتها القوة والإزاحة والتعجيل وشدة المجال الكهربائي ... الخ.

إن كل كمية إتجاهية يمكن أن تُمثَل بسهم يبين إتجاهه وطوله إتجاه المتجه ومقداره على التوالي، أما كتابة فيمثل بحرف فوقه سهم مثل $\overrightarrow{A}$ وفي الطباعة يرمز له بحرف ثقيل A، ومقدار المتجه يُمثَل بحرف دون سهم أو بالقيمة المطلقة للمتجه $|\overrightarrow{A}|$، وأحياناً يكتب المتجه بحرفي بداية ونهاية السهم مثل المتجه $\overrightarrow{OP}$ كما في الشكل:



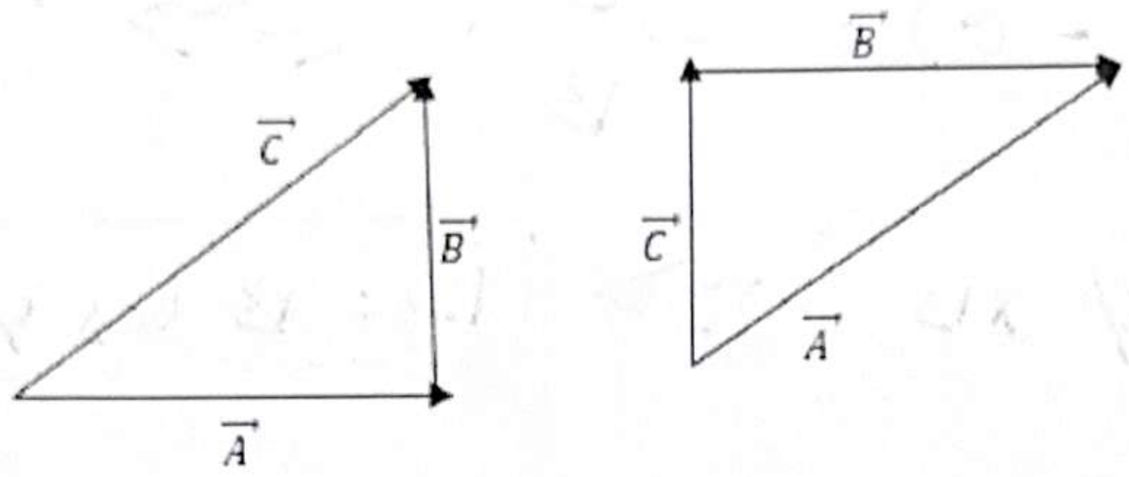
شكل (1) سهم يمثل المتجه $\overrightarrow{OP}$.

* جمع المتجهات Addition of Vectors

لإيجاد مجموع أو محصلة متجهين مثل $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$، يُرسَم المتجه $\overrightarrow{A}$ ومن نهايته يُرسَم المتجه $\overrightarrow{B}$، ثم يُرسَم المتجه $\overrightarrow{C}$ الذي يُمثل مجموع المتجهين من بداية $\overrightarrow{A}$ إلى نهاية $\overrightarrow{B}$. وتُكتَب المعادلة الإتجاهية لهذه المحصلة على الشكل الآتي:

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$$

التي تُكافيء قانون متوازي الأضلاع لجمع المتجهات.



شكل (2) مجموع متجهين.

وبالطريقة نفسها يمكن جمع أكثر من متجهين. يخضع الجمع لقانوني التبادل $(\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{B} + \vec{A})$، والتجميع $[\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}]$. أما حساب مقدار المحصلة C وإتجاهها فيكون بطريقتين هما طريقة الحساب وطريقة تحليل المتجهات.

لحساب مقدار محصلة متجهين بطريقة الحساب كما يأتي:

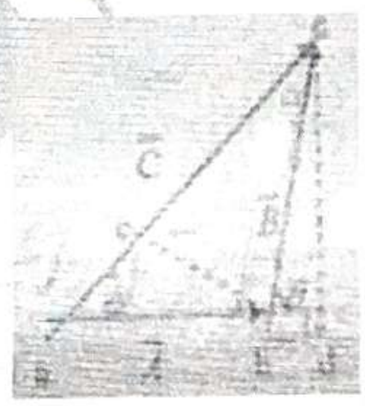
$$(ac)^2 = (ad)^2 + (dc)^2$$

$$\because ad = ab + bd = A + B\cos\theta$$

$$dc = B\sin\theta$$

$$\therefore C^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$



شكل (3) حساب محصلة متجهين.

تمثل المعادلة أعلاه قانون الجيب تمام، حيث θ هي الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$، ومن خلالها تحسب مقدار المحصلة أما إتجاهها فيعرف من إيجاد مقدار الزاوية $\emptyset$ من المثلث acd:

$$cd = ac\sin\emptyset$$

ومن المثلث bcd نجد أنّ:

$$cd = bc\sin\theta$$

$$C\sin\emptyset = B\sin\theta \Rightarrow\therefore \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\emptyset}$$

$$be = A\sin\emptyset = B\sin\alpha \Rightarrow\therefore \frac{B}{\sin\emptyset} = \frac{A}{\sin\alpha}, \therefore \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\emptyset} = \frac{A}{\sin\alpha}$$

وتُعرَف هذه المعادلة بمعادلة الجيب.

إنَ ما يجدر الإشارة إليه أن مقدار محصلة متجهين يمكن أن يكون أكبر أو يساوي أو أصغر من أي منهما، وهذا يتوقف على مقدار الزاوية المحصورة بينهما. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $\overrightarrow{B}$ عمودياً على $\overrightarrow{A}$، أي أن $\theta = 90^{\circ}$، نحصل على:

$$C = \left(A^2 + B^2\right)^{1/2} \text{ and } \tan\emptyset = \frac{B}{A}$$

*طرح المتجهات (الفرق بين المتجهات) Subtraction of Vectors

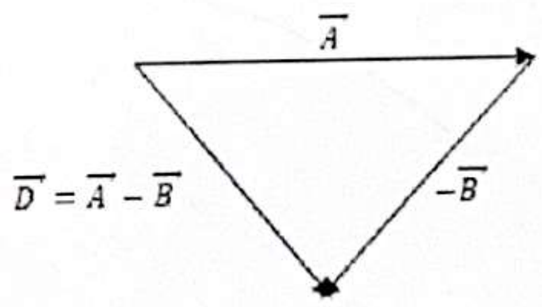
لو عرَفنا متجهاً معيناً بـ $\vec{A}$ فإن $-\vec{A}$ هو متجه أيضاً مقداره نفس مقدار $\vec{A}$ ولكن يعاكسه بالإتجاه، وكما عرَفنا مجموع متجهين يُمكن أن نُعرِف الفرق بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من خلال المعادلة الآتية:

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

والتي يمكن أن تُكتب بالشكل الآتي:

$$\vec{D}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

وتعني $\vec{D}$ محصلة (مجموع) المتجهين $\vec{A}$ و $-\vec{B}$ والتي تسمى أيضاً الفرق بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$. إذا كان $\vec{A}$ و $\vec{A}=\vec{B}$ فالفرق بينهما يمثله المتجه الصفري Nell Vector الذي يُعرَف بإنه متجه مقداره صفر وإتجاهه غير معروف ويُرمَز له $\vec{O}$. ولو طُرِح المتجهان بالترتيب المعاكس لحصلنا على:



شكل (4) الفرق بين متجهين.

أما مقدار $\vec{D}$ فيُحسب على النحو الآتي:

$$D^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \theta)$$

$$\therefore D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

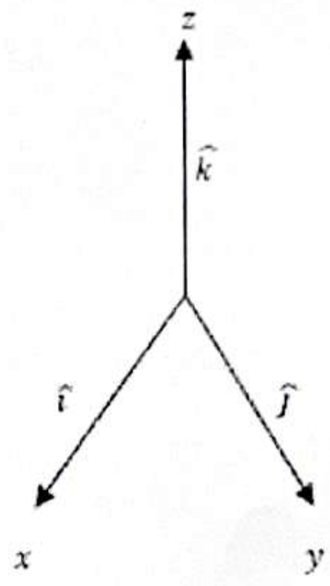
المتجهات Vectors

*وحدة المتجه Unit Vector

يُسمى المتجه الذي مقداره وحدة واحدة بوحدة المتجه وأحياناً بمتجه الوحدة، فالمتجه $\vec{A}$ يُمكن تمثيله بوحدة متجه $\hat{a}$ بنفس إتجاه $\vec{A}$ مضروبة بمقدار المتجه نفسه، أي:

$$\vec{A} = \hat{a}A \Rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$$

لذلك فوحدة المتجه تمثل النسبة بين المتجه ومقداره، والعلامة ^ فوق وحدة المتجه تشير إلى أنه متجه وحدة (إلا إذا ذُكِرَ غير ذلك). وقد أتُفِقَ بإنَ $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ هي ثلاثة متجهات متعامدة، أي إنَ كل متجه عمودي على المتجهين الآخرين في نظام الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) x, y, z على التوالي وحسب الشكل أدناه.



شكل (5) الإحداثيات الديكارتية.

*ضرب المتجهات: Vectors Multiplication

1- الضرب العددي: Scalar Product

يُعرَف حاصل الضرب العددي بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالعدد الناتج من حاصل ضرب مقداري المتجهين في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما، و هي كمية عددية لذلك سُمي هذا الضرب بالعددي و الذي يُرمز له $\vec{A}.\vec{B}$ و يقرأ (A dot B) و أحياناً يسمى بالضرب النقطي إعتماداً على رمزه. و تبعا للتعريف تكتب صيغته الرياضية بـ:

$$\vec{A}.\vec{B} = \mathrm{AB}\,\mathrm{Cos}\theta$$

حاصل الضرب العددي

إذا كانت $\theta = 0$ فإن $\vec{A}.\vec{B} = \mathrm{AB}$، لإن $Cos\,(0) = 1$، لذلك فمربع مقدار المتجه ينتج من ضرب المتجه بنفسه، أي:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2$$

أما إذا كانت $\theta = 90$ فإن $\vec{A}.\vec{B} = 0$، لإنّ $Cos\,(90) = 0$، و هذا هو شرط تعامد المتجهين على أن لا يكون أحد المتجهين أو كلاهما متجها صفرياً. ← أي ليس له اتجاه وهو استثناء وحالة خاصة

*هناك بعض القوانين التي يخضع لها الضرب العددي منها: (متشابه)

1- قانون التبادل

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

2- قانون التوزيع

$$\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

3- لو كانت m كمية عددية فإن:

$$m(\vec{A}.\vec{B}) = (m\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(m\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{B})m$$

4- لمتجهات الوحدة يكون:

$$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1, \quad \hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$$

5- إذا كان: $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$، فإن:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2$$

$$\vec{B}.\vec{B} = B^2 = B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2$$

و من تطبيقات الضرب العددي إستعماله في برهان قانون الجيب تمام و بالشكل الآتي:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C}.\vec{C} = C^2 = (\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A}.\vec{A} + 2\vec{A}.\vec{B} + \vec{B}.\vec{B}$$

$$\therefore\ C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\,Cos\theta$$ ← قانون الجيب تمام

الذي تم استنتاجه سابقاً

*مـثال:- جد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{M} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{N} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

*الحـل:-

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = MN\text{Cos}\theta \quad \rightarrow \quad \text{Cos}\theta = \frac{\vec{M} \cdot \vec{N}}{MN}$$

حاصل ضرب المتجهين / حاصل ضرب الطولين

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 4 \quad \longrightarrow$$ حاصل ضرب الجهتين

$$M = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \longrightarrow$$ نحسب كل الطول باخذ الجذر التربيعي

$$N = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7 \quad \longrightarrow$$ كذلك

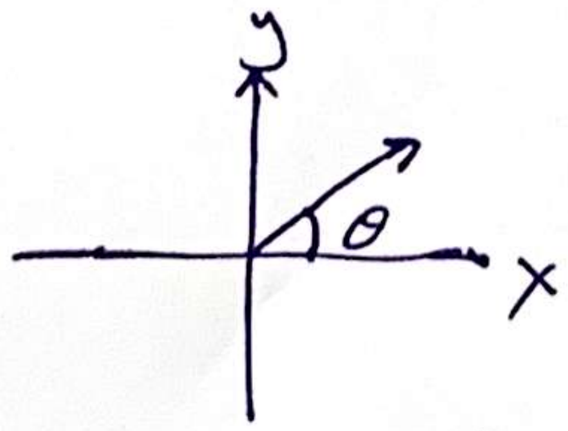
$$\therefore \ \text{Cos}\theta = \frac{4}{(3)(7)} = \frac{4}{21} = 0.1905 \quad \rightarrow \quad \theta = 79^\circ$$

(a, b) متجهان غير صفريتين (لهما طول معين)

وبينهما الزاوية (θ)

$$\text{Cos}\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$ = حاصل ضرب المتجهين / حاصل ضرب الطولين

نحسن كل الزاوية بين اي متجهين باستخدام الضرب الداخلي
(قاعدة الـ Cos)



$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

نحسن كل الزاوية بين متجه والمحور باستخدام الـ (tan)

المتجهات Vectors

2- الضرب الإتجاهي: Vector Product

يُعرَف مقدار الضرب الإتجاهي بحاصل ضرب مقداري المتجهين و جيب الزاوية المحصورة بينهما. و هو كمية متجهة يكون إتجاهها عمودياً على مستوى كل من المتجهين و يخضع لقاعدة الكف الأيمن. يُرمز لحاصل الضرب الإتجاهي بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A} \times \vec{B}$ و يُقرأ $(\vec{A}\ Cross\ \vec{B})$.

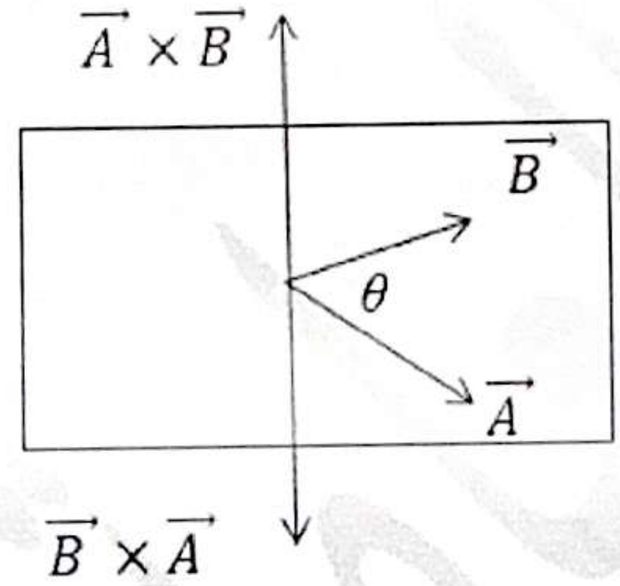
*يكون إتجاه الكمية $\vec{A} \times \vec{B}$ بإتجاه الإبهام عند دوران بقية أصابع الكف من المتجه $\vec{A}$ إلى المتجه $\vec{B}$.

و تبعا للتعريف تكتب صيغته الرياضية بـ:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB\ Sin\theta)n$$

حاصل الضرب الإتجاهي

حيث n هي وحدة المتجه التي تبين إتجاه الضرب $\vec{A} \times \vec{B}$.



الشكل (6) إتجاه الضرب الإتجاهي

*لو كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$، أي إن $\theta = 0$، فإنَّ:

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0$$

بعبارة أخرى، إذا كان $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ و إن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ليس متجهات صفرية فإنهما متوازيان.

*هناك بعض القوانين التي يخضع لها الضرب الإتجاهي منها:

1- عدم صحة قانون التبادل

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

2- قانون التوزيع

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

3- لو كان m كمية عددية فإنَّ:

$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})m$$

4- لمتجهات الوحدة يكون:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$$

5- إذا كان: $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$ ، فإنَّ:

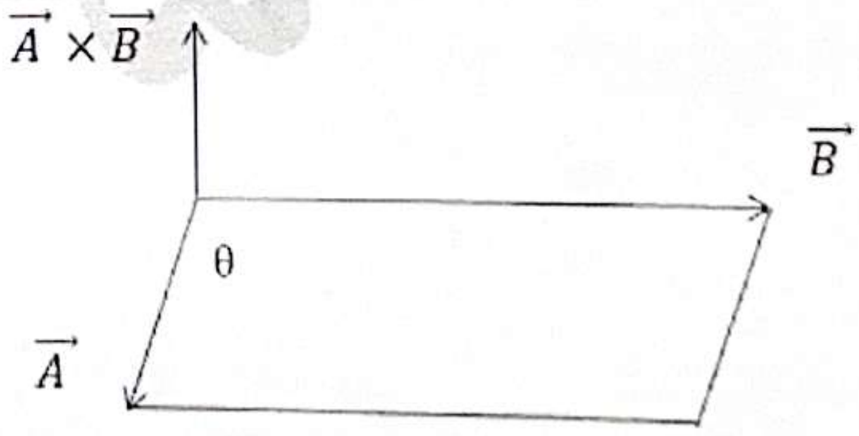
$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

و يمكن كتابة هذه المعادلة على شكل المحدد الآتي:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

معكوس

6- مقدار الضرب الإتجاهي يساوي مساحة متوازي الأضلاع المتكون من المتجهين أو يساوي ضعف مساحة المثلث المتكون من المتجهين و محصلتهما، و إتجاهه عمودي على مستوي متوازي الأضلاع. لهذا يمكننا أن نعتبر الضرب الإتجاهي هو المساحة الإتجاهية لمتوازي الأضلاع. كما في الشكل التالي:



الشكل (7) مساحة متوازي الأضلاع

*مثال:- إذا كان $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ جد: $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$ و $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

*الحل:-

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = (2)(1) + (1)(-1) + (-1)(2) = -1$$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(2-1) + \hat{\jmath}(-1-4) + \hat{k}(-2-1)$$

$$= \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

---

*مثال:- إذا كان $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ جد: $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})$

*الحل:-

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) + (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) - (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = \hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\therefore (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-21) + \hat{\jmath}(-3-3) + \hat{k}(-21-1)$$

$$= -20\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

*ممكن حل السؤال بطريقة أخرى إعتماداً على خواص الضرب الإتجاهي.

المتجهات Vectors

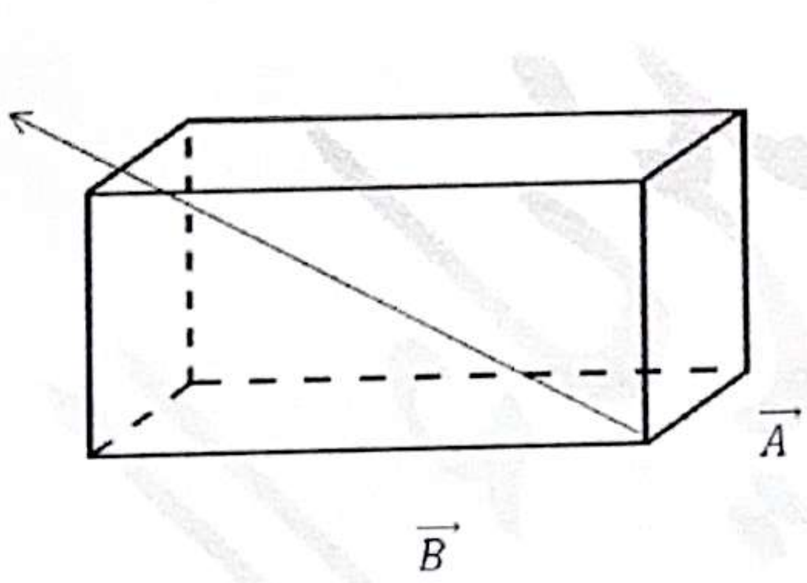
* الضرب الثلاثي: Triple Product

هناك نوعين للضرب الثلاثي هما:-

1- الضرب الثلاثي العددي: Scalar Triple Product

لنأخذ متوازي مستطيلات كما في الشكل، نلاحظ إن الكمية العددية $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}).\overrightarrow{C}$ هي حجم متوازي المستطيلات الذي مساحة قاعدته $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B})$ و إرتفاعه المائل (جانبه) $\overrightarrow{C}$، و عندما تكون المتجهات الثلاثة في المستوي نفسه تكون:

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}).\overrightarrow{C} = 0$$



الشكل (8) متوازي مستطيلات

و من ملاحظة الشكل نرى أن:

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}).\overrightarrow{C}$$

إذ يمكن أن تتبادل علامتا الضرب في الضرب الثلاثي العددي دون أن تتغير قيمة حاصل الضرب و مع ذلك فإنَّ:

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = -\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B})$$

و لذلك فإن حاصل الضرب العددي الثلاثي لا يتغير بتبديل ترتيب المتجهات دوريا و لكن إشارته تتغير إذا كان تبديل المتجهات غير دوري. عندما تمثل المتجهات الثلاثة بدلالة مركباتها المتعامدة نستطيع التعبير عن الضرب الثلاثي العددي بشكل محدد مثل:

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

2- الضرب الثلاثي الإتجاهي: Vector Triple Product

يُسمى التعبير $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ بالضرب الثلاثي الإتجاهي و هو عمودي على المتجهين $\vec{A}$ و $(\vec{B} \times \vec{C})$. و بإستعمال قانون الضرب الإتجاهي لمتجهين نستطيع أن نحصل على العلاقة:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

حيث الضرب الناتج هو ضرب متجه بكمية عددية.

كما يمكن الإستنتاج أيضا أن:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

أي إن قانون التجميع لهذا الضرب لا يصح.

***مثال:-** إذا أُعطيت المتجهات $\vec{R_1} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ، $\vec{R_2} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ ، $\vec{R_3} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$، فجد كلا من:

$1 - (\vec{R_1} \times \vec{R_2}) \times \vec{R_3}$

$2 - (\vec{R_1} \times \vec{R_2}).\vec{R_3}$

***الحل:-**

$$1 - \vec{R_1} \times \vec{R_2} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-2) + \hat{\jmath}(4+3) + \hat{k}(3+2)$$

$$= -\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$(\vec{R_1} \times \vec{R_2}) \times \vec{R_3} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(14+10) + \hat{\jmath}(5+2) + \hat{k}(2-7)$$

$$= 24\,\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

$$2 - (\vec{R_1} \times \vec{R_2}).\vec{R_3} = (-\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}) = -1 - 14 + 10 = -5$$

الميكانيك

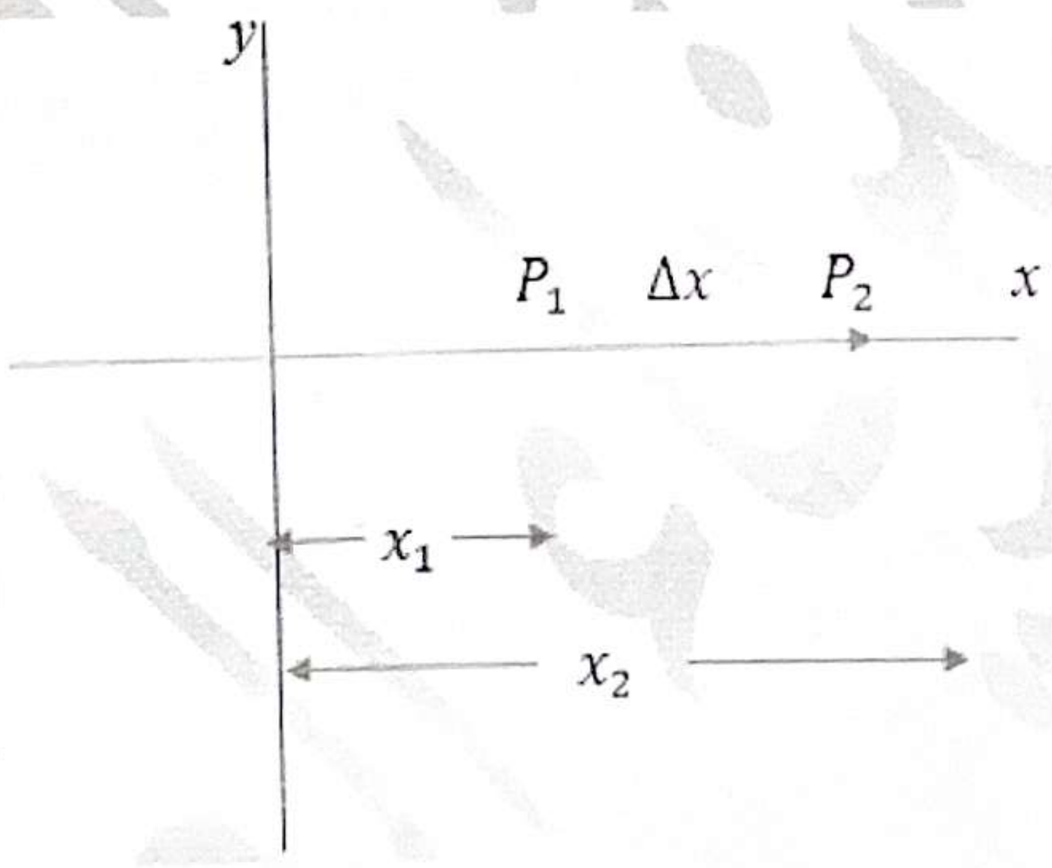
الحركة الخطية Rectilinear Motion

*الحركة Motion

إن دراسة حركة لجسم تعني دراسة كل ما يتعلق بموقع الجسم و سرعته و تعجيله. و تُعرَّف حركة الجسم بأنها "التغيير المستمر في موقع الجسم" و هناك أنواع عديدة للحركة كالإنتقالية و الدورانية و الإهتزازية، فالحركة الإنتقالية هي التي تكون فيها جميع أجزاء الجسم تتحرك بنفس الإتجاه أي بدون دوران، ويتيسر ذلك بإفتراض حركة جسم متناهي في الصغر يسمى بالجسيم Particle. يُعامل الجسيم كنقطة هندسية، وله كتلة وليس له أبعاد، والوصف الدقيق لحركة مثل هذه النقطة يُمثل وصفاً كاملاً لحركة الجسم ككل. ففكرة الجسيم هي فكرة نظرية الغاية منها تسهيل الحسابات الرياضية. وتسمى الحركة الإنتقالية على خط مستقيم بالحركة الخطية Linear Motion.

*معدل السرعة Average Velocity

لنأخذ جسيماً يتحرك على طول المحور السيني x-axis من النقطة P_1 إلى النقطة P_2 كما موضح بالشكل التالي. إزاحة الجسم المتحرك من P_1 إلى P_2 مُعرَّفة بالمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ الذي مقداره $\Delta x = x_2 - x_1$.



الشكل (9) يوضح إزاحة جسيم بين نقطتين.

فلو أُزيح الجسيم من النقطة P_1 ذات الإحداثي x_1 في الزمن t_1 إلى النقطة P_2 ذات الإحداثي x_2 في الزمن t_2 فإن إزاحة الجسيم Δx تقطع بالفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$. وبالتالي نُعرّف النسبة بين الإزاحة والزمن المستغرق لها بمعدل السرعة (تغير الإزاحة في وحدة الزمن) ويُرمز له $\vec{V}$ وأحياناً V_{av} ويُكتب رياضياً:

$$\vec{\bar{V}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t}$$

وهو كمية متجهة تتضمن النسبة بين الإزاحة الكلية والزمن الكلي بغض النظر عن شكل المسار بين النقطتين فقد يكون المسار الفعلي مستقيماً أو منحنياً وقد تكون الحركة منتظمة أو غير منتظمة لهذا السبب يُطلق على المعدل الزمني لتغير الإزاحة بمعدل السرعة وليس السرعة. إن مقدار معدل السرعة $\bar{V}$ يُعطى بالمعادلة:

$$\bar{V} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

والذي يُسمى بمعدل الإنطلاق Average Speed و هو النسبة بين المسافة المقطوعة من قبل الجسيم في وحدة الزمن، و هو كمية عددية و يُقاس بنفس وحدات السرعة أي متر/ ثانية أو سنتمتر / ثانية. و يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل الآتي:

$$x_2 - x_1 = \bar{V}(t_2 - t_1)$$

لنجعل $t_2, t_1 = 0$ أي زمن عشوائي، لذلك إذا كان الموقع الإبتدائي عند $t = 0$ هو الإحداثي x_0 وعند t يكون الموقع x فالمعادلة السابقة تكون:

$$x - x_0 = \bar{V}t$$

وإذا كان الجسيم في نقطة الأصل عند $t = 0$ فتبسط المعادلة السابقة إلى:

$$x = \bar{V}t$$

إن أبسط أنواع الحركة للجسيم هي الحركة المنتظمة على خط مستقيم و هي الحركة التي يقطع فيها الجسيم نفس المسافة بنفس الإتجاه في كل ثانية. و يُقال للجسيم إنه يتحرك بسرعة ثابتة، ومفهوم السرعة الثابتة يعني مقداراً واتجاهاً ثابتاً، وإذا تغير أحدهما أو كلاهما عندئذٍ يُقال إن الجسيم يتحرك بسرعة متغيرة، وفي هذه الحالة تحتاج لتحديد سرعة الجسيم المتحرك في كل لحظة زمنية والتي تسمى بالسرعة الآنية.

*السرعة الآنية Instantaneous Velocity

تُعرَّف سرعة الجسم في لحظة معينة أو في نقطة معينة واقعة على مساره بالسرعة الآنية للجسم. ولغرض إيجادها في نقطة مثل P_1 في شكل (9)، تُقرَّب P_2 من P_1 تدريجياً فعندما تقترب P_2 كثيراً من P_1 بحيث أن الكميتين $|\overrightarrow{\Delta x}|$ و Δt تقتربان من الصفر حينئذٍ يصبح المعدل $\frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t}$ مساوياً لسرعة الجسيم في نقطة P_1 ويُطلق عليها بالسرعة الآنية في تلك النقطة ويُعبَّر عن ذلك رياضياً بما يأتي:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

وبناءً على ذلك، فالسرعة الآنية لجسيم يتحرك بإزاحة معينة تمثّل بالمشتقة الأولى لتلك الإزاحة نسبةً إلى الزمن.

*مثال:- يتحرك جسم على طول المحور x حسب المعادلة $x = 3t^2 - 4t$، حيث x مقاسة بالأمتار و t بالثواني.

1- أحسب معدل السرعة في الفترة الزمنية من 2sec إلى 3sec.

2- أحسب السرعة الآنية في نهاية الثانية الرابعة من حركته.

3- متى يكون الجسيم في حالة سكون؟ وعلى أي بُعد من إبتداء حركته؟

*الحل:-

1- لنفرض أن $t_0 = 2$ و بالتالي يكون:

$$x_0 = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4\ m$$

$$x = 3(3)^2 - 4(3) = 27 - 12 = 15\ m$$

$$\Delta x = x - x_0 = 15 - 4 = 11\ m$$

$$\Delta t = t - t_0 = 3 - 2 = 1\ sec$$

$$\therefore \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 11\ m/sec$$

-2

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underbrace{6t - 4}_{\frac{dx}{dt}} = 6(4) - 4 = 20\ m/sec$$

3- يكون الجسيم ساكناً عندما تكون v=0 ، أي أن:

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$6t - 4 = 0 \rightarrow \therefore t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.666\ sec$$

$$\therefore x = 3(0.666)^2 - 4(0.666) = -1.333\ m$$

أي إن الإزاحة إلى يسار نقطة الأصل.

الميكانيك

*معدل التعجيل Average Acceleration

إذا كانت السرعة الآنية تتغير بإستمرار في أثناء الحركة فيُقال أن الجسيم يتحرك بتعجيل. والسرعة قد تتغير في مقدارها أو إتجاهها أو كلاهما. فالسرعة المتغيرة بالمقدار فقط مثل حركة الجسيم على خط مستقيم بإتجاه واحد، فالتعجيل هنا يتولد من تغير مقدار السرعة فقط وهذا التغير يكون إما منتظماً أو غير منتظم وقد يكون متزايداً أو متناقصاً. فإذا كانت السرعة الآنية للجسيم في الزمن t_1 هي $\overrightarrow{V_1}$ وفي الزمن اللاحق t_2 تكون سرعتة الآنية $\overrightarrow{V_2}$ فمعدل التعجيل يكون:

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

وهو كمية إتجاهية ووحداته وحدات سرعة على وحدات زمن أي متر / ثانية^2 أو سنتمتر / ثانية^2.

*التعجيل الآني Instantaneous Acceleration

يُعرَّف التعجيل الآني لجسيم ما بأنه تعجيل ذلك الجسيم في أي وقت من أوقات حركته أو في أية نقطة معينة على مساره. كما ويمكن تعريفه بأنه معدل التعجيل للجسيم على مساره المتناهي بالصغر على أن تكون تلك النقطة واقعة على ذلك المسار. و يُعبَّر عنه رياضياً بالمعادلة:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

ومن معادلتي السرعة الآنية والتعجيل الآني نستطيع كتابة التعجيل بالشكل الآتي:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

أي أن التعجيل الآني لجسيم ما يتحرك بإزاحة معينة هو المشتقة الأولى لسرعة ذلك الجسيم بالنسبة للزمن أو هو المشتقة الثانية للإزاحة بالنسبة للزمن.

*<u>مثال:-</u> يتحرك جسم على خط مستقيم بتعجيل $a = 4 - t^2$ ،جد السرعة والإزاحة كدوال للزمن، إذا علمت بإنه عندما $t=3sec$ فإنَّ $v=2\ m/sec$ و $x=9\ m$.

*<u>الحل:-</u>

$$a = 4 - t^2 \rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_{0}^{1} (4 - t^2)dt$$

$$V - V_0 = 4t - \frac{1}{3}t^3 \rightarrow 2 - V_0 = 4(3) - \frac{1}{3}(3)^3$$

$$\therefore V_0 = -1$$

$$\therefore V = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (4t - \frac{1}{3}t^3 - 1)dt \rightarrow x - x_0 = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t$$

$$\therefore 9 - x_0 = 2(3)^2 - \frac{1}{12}(3)^4 - (3) \Rightarrow \therefore x_0 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}$$

*الحركة الخطية بتعجيل ثابت Rectilinear Motion With Constant Acceleration

تُعتبر الحركة الخطية بتعجيل ثابت أبسط أنواع الحركة للأجسام. لذا سنشتق القوانين التي تتحكم بحركة الأجسام بتعجيل منتظم (ثابت) على خط مستقيم، فإذا كان التعجيل للجسيم منتظم، فإن معدل التعجيل يساوي تعجيله الآني، أي أن:

$$a = \frac{V - V_0}{t - t_0}$$

حيث $t_0 = 0$ وهو زمن إبتداء الجسيم بالحركة متمثلة بالسرعة V_0 والتي تسمى بالسرعة الإبتدائية أما V فهي سرعة الجسيم عند الزمن t، وبذلك يمكن كتابة المعادلة بالشكل الآتي:

$$V = V_0 + at$$

عندما يتحرك الجسيم بتعجيل ثابت أي عندما تتزايد السرعة بإنتظام مع الزمن يكون معدل (متوسط) السرعة مساوياً إلى نصف مجموع السرعتين عند بداية الحركة وعند نهايتها، أي:

$$\bar{V} = \frac{V + V_0}{2}$$

وبإستعمال المعادلتين نستطيع التوصل إلى المعادلة الأتية:

$$x = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

وعندما تُحَل معادلة السرعة للزمن وتعوض بمعادلة الإزاحة نحصل على:

$$V^2 = {V_0}^2 + 2ax$$

فالمعادلات الأخيرة هي معادلات الحركة بتعجيل ثابت للحالة الخاصة التي يكون فيها الجسيم عند نقطة الأصل متى ما كانت $t = 0$.

إن معادلات الحركة يمكن إشتقاقها بطريقة التكامل المحدد على الوجه الآتي:

$$\because a = \frac{dV}{dt} \rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = a \int_{t_0=0}^{t} dt$$

$$V - V_0 = at \rightarrow V = V_0 + at$$

$$\because V = \frac{dx}{dt} \rightarrow \therefore dx = V dt = (V_0 + at) dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = V_0 \int_{t_0=0}^{t} dt + a \int_{t_0=0}^{t} t dt$$

$$\therefore x = V_0 + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\because a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V\frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_0}^{V} V dV = a \int_{x_0=0}^{x} dx \rightarrow \frac{1}{2}\left(V^2 - {V_0}^2\right) = ax$$

$$\therefore V^2 = {V_0}^2 + 2ax$$

*الأجسام الساقطة بحرية (السقوط الحر للأجسام) Freely Falling Bodies

من أكثر الأمثلة شيوعاً للحركة بتعجيل منتظم هي حركة الأجسام الساقطة سقوطاً حراً نحو سطح الأرض. فبإهمال مقاومة الهواء للأجسام الساقطة والواقعة ضمن منطقة واحدة من سطح الأرض فإنها تسقط نحو الأسفل بتعجيل واحد مهما كانت أشكالها أو كتلها أو حجومها إن كانت هذه المسافات الساقطة منها هذه الأجسام غير كبيرة، بحيث تؤثر على قيمة التعجيل الأرضي أو تعجيل الجاذبية g، الذي مقدارها $9.8\ m/s^2$ تقريباً، وهذه القيمة تتغير تغيراً طفيفاً من موضع إلى آخر على سطح الأرض لإن التعجيل الأرضي يعتمد على بعد الجسم عن مركز الكرة الأرضية ويتأثر بدوران الأرض الذي يختلف بإختلاف نقاطها.

من المعلوم إن g يتجه دائماً نحو الأسفل أي نحو الأرض، لذلك إذا إخترنا الإتجاه نحو الأسفل كإتجاه موجب، فبالنسبة للمسائل التي تتعلق بالسقوط الحر للأجسام فإن g يكون موجباً إذا كان الجسم ساقطاً نحو الأسفل، أما إذا إخترنا الإتجاه نحو الأعلى كإتجاه موجب فإن g يكون سالباً إذا كان الجسم مقذوفاً نحو الأعلى. وبأخذ هذه الفرضيات بنظر الإعتبار مع معادلات الحركة ذات التعجيل المنتظم في خط مستقيم يكون بإمكاننا إستعمالها للأجسام الساقطة بحرية. فالمعادلات اللازمة لوصف حركة الأجسام الساقطة سقوطاً حراً هي:

$$V = V_0 + gt$$

$$y = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$V^2 = {V_0}^2 + 2gy$$

حيث أبدلنا التعجيل a بالتعجيل الأرضي g والإزاحة x بالإزاحة y في معادلات الحركة الخطية.

*<u>مثال:-</u> قُذِفت كرة عمودياً إلى الأعلى من حافة سطح بناية عالية وبالقرب من زاويتها في طريق عودتها أخطأت سطح البناية فمرت بنقطة على بعد 1 m أسفل نقطة قذفها بسرعة مقدارها 20 m/sec بعد مرور 4 sec من قذفها. جد:

1- السرعة الإبتدائية التي قُذِفت بها الكرة،

2- أعظم أرتفاع تصله الكرة،

3- إرتفاع البناية إذا وصلت الكرة إلى نهايتها بعد 5 sec من قذفها.

*الحل:-

1- إن سرعة وتعجيل الكرة يكون إتجاههما إلى الأسفل لذلك لابد من وضع الإشارة السالبة، أي:

$$V = V_0 + gt \Rightarrow -20 = V_0 - 9.8 * 4$$

$$\therefore V_0 = 19.2\ m/sec$$

-2

$$V^2 = {V_0}^2 + 2gy \Rightarrow 0 = (19.2)^2 - 2 * 9.8y$$

$$\therefore y = 18.8$$

-3

$$y' = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y' = 19.2 * 5 - \frac{1}{2} * 9.8 * (5)^2$$

$$y' = -26.5\ m$$

وواضح إن الإشارة السالبة تشير إلى أن الإرتفاع بإتجاه $-y'$ بالنسبة لنقطة القذف.