الرياضيات

د. مروان صالح جميل العبادي

الفصل الاول

الاعداد الحقيقية Real Numbers

هي كل الاعداد التي يمكن كتابتها بشكل كسر عشري

غير نسبية

$$\pi = 3.14$$

$$\sqrt{2} = 1.414$$

نسبية

$$\frac{1}{3} = 0.333$$

$$-\frac{3}{4} = -0.75$$

تعتبر الاعداد أساس الرياضيات, وتحتوي منظومة الاعداد الحقيقية على الاتي

- الاعداد الطبيعية: هي الاعداد الأساسية المألوف عليها {.........,1,2,3,4}=N

العمليات الجبرية على الاعداد الحقيقية

$$1 + 2 = 3 \in N$$

$$2 - 5 = -3 \notin N$$

- الاعداد الكلية (W): هي الاعداد الكلية مضافا اليها العدد 0 {.......,0,1,2,3,4}=W
- الاعداد الصحيحة (Z): هي إضافة مجموعة الاعداد السالبة الى الاعداد الكلية

Z={......,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,......}

$$-3 + 1 = -2 \in \mathrm{Z}$$

$$-3 * 1 = -3 \in \mathrm{Z}$$

$$-3 - 1 = -4 \in \mathrm{Z}$$

$$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \notin \mathrm{Z}$$

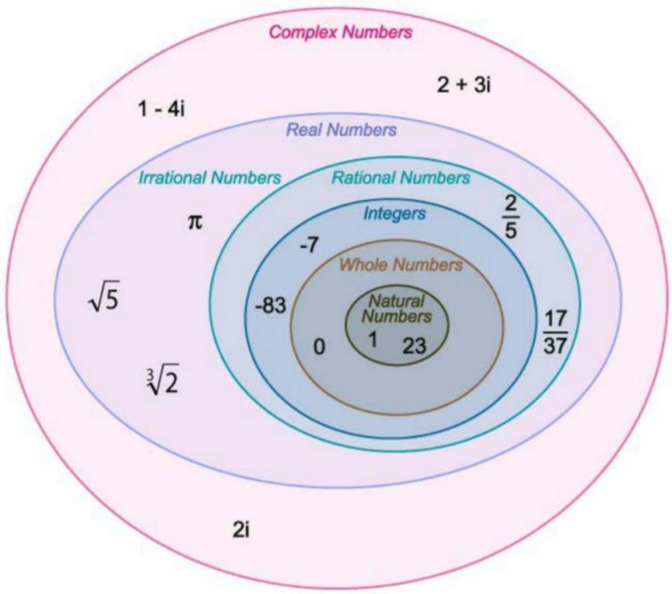
- الاعداد النسبية (Q): هي الاعداد التي يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام كلاهما عدد صحيح والمقام لا يساوي صفر مثل $\frac{2}{3}, \frac{18}{5}, \ldots\ldots$
- الاعداد غير النسبية (I) : هي الاعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة يسط ومقام مثل $\pi \;, \sqrt{2}, \ldots\ldots$

الاعداد المركبة:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow (x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \ , x = -1$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow x = \mp\sqrt{1}$$



بعض خواص الاعداد الحقيقية:

1. خاصية الجمع $a + b \in R$
2. خاصية الضرب $a \,.\, b \in R$
3. القسمة $b \neq 0$ $\frac{a}{b} \in R$
4. {0} هو عدد حقيقي وهو عنصر محايد لعملية الجمع
5. {1} هو عدد حقيقي وهو عنصر محايد لعملية الضرب
6. كل عدد حقيقي a يوجد معكوس جمعي (-a)
7. كل عدد حقيقي a يوجد معكوس ضربي $(\frac{1}{a})$

المجموعات Sets

هي مجموعة من الأشياء وهذه الأشياء تسمى بالعناصر وعادة تسمى بـ A,D,C وعناصرها a,b,c

$$A=\{2,4,6,.....\}$$

$$B=\{a,b,c,.....\}$$

C ={الشتاء, الصيف, الخريف, الربيع}

ملاحظات/ * في المجموعة ترتيب العناصر غير مهم

* التكرار غير مسموح

* ممكن سرد العناصر او كتابتها بصيغة مميزة مثل:

$$A=\{2,3,5,7,11\}$$

$$A=\{X:X \quad 1<X<12\}$$

$$C=\{Z:Z =a \pm bi \quad , \forall\, a,b \in R\}$$

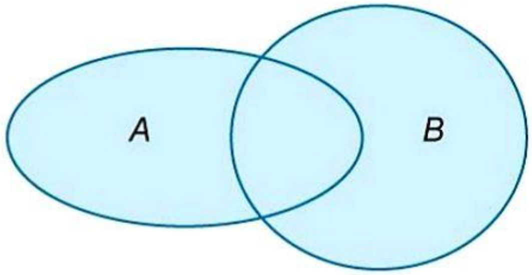
$$S=\{2,3\} \qquad S \leq A$$

$$A= \phi = \{\ \}$$

العمليات على المجموعات Sets Operations:

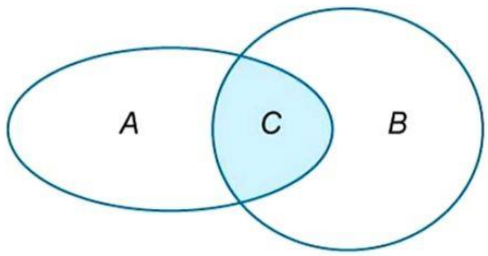
1. الاتحاد Union: كل الاعداد الموجودة في A و B مع الاعداد المشتركة وبدون تكرار

$$A \cup B = \{x: x \in A \ \ or \ \ x \in B\}$$



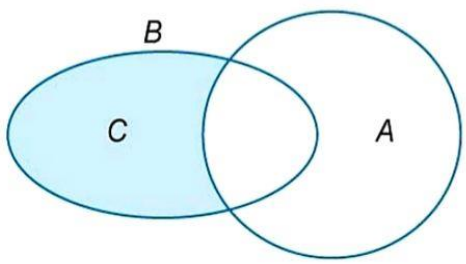
2. التقاطع Intersection:

$$C = A \cap B = \{x : x \in A \quad and\ x \in B\}$$



3. الفرق difference:

$$C = A \backslash B = \{x : x \in A \ , x \notin B\}$$



Inequalities المتباينات

خواص المتباينات: اذا كانت a,b,c اعداد حقيقية فإن

1. a > b and b > a → a = b
2. a > b and b > c → a > c (5>3, 3>1, 5>1)
3. a > b → a + c > b + c , a - c > b - c
4. a > b and c > 0 ac > bc , and c < 0 ac < bc

5. a > 0 $\rightarrow$ $\frac{1}{a} > 0$

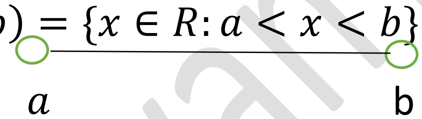
6. a > b $\rightarrow$ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $\left(10 > 2 \quad \rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{2}\right)$

الفترات Intervals

ليكن a,b عددين حقيقيين $(a, b \in R)$ بحيث $a < b$ نسمي المجموعات الجزئية التالية من R بالفترات, ونعرفها كما يلي :

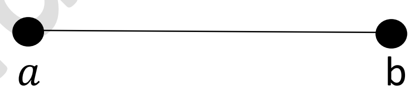
1- الفترة المفتوحة (a,b)

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$$



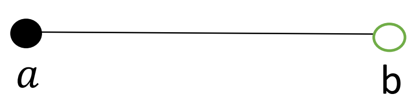
2- الفترة المغلقة [a,b]

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

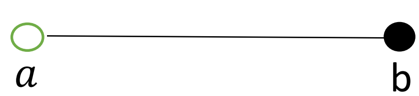


3- الفترات نصف المفتوحة (او نصف المغلقة) [a,b) و (a,b]

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

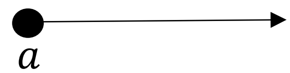


$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

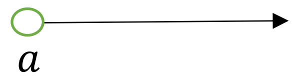


4- الفترات غير المنتهية $[a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, و $(-\infty,\infty)$

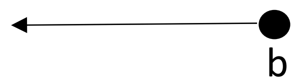
$[a,\infty)=\{x\in R: x\geq a\}$



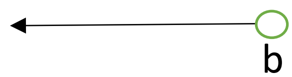
$(a,\infty)=\{x\in R: x> a\}$



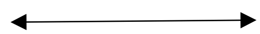
$(-\infty,\mathrm{b}]=\{x\in R: x\leq b\}$



$(-\infty,\mathrm{b})=\{x\in R: x< b\}$



$(-\infty,\infty)=R$



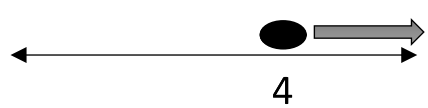
حل المتباينات

وهي عمليات إيجاد فترة او فترات من الاعداد التي تحقق المتباينة في قيم X

مثال/ جد $x-1>3$

الحل/ $x>1+3 \quad \rightarrow \quad x>4 \;\; (4,\infty)$

$$S=\{x: x>4\}$$



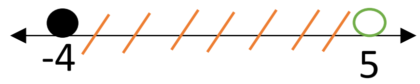
مثال/ جد $-11\leq 2x-3<7$

الحل/ $-11+3\leq 2x<7+3$

$$-8\leq 2x<10$$

$$-4\leq x<5$$

$$S = \{x: -4 \leq x < 5\} = \{x: x \in [-4,5)\}$$



القيمة المطلقة للمتباينات

الخواص:

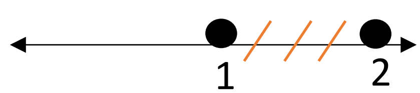
1. $|a| = |-a| = a$
2. $|a||b| = ab$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| = |a| + |b|$

<u>مثال/</u> جد حل المتباينة واذكر مجموعة الحل مع تمثيل المتباينة على خط الاعداد

a. $\boldsymbol{|2x - 3| \leq 1}$

Sol:

$$-1 \leq 2\text{x} - 3 \leq 1$$
$$-1 + 3 \leq 2x \leq 1 + 3$$
$$2 \leq 2x \leq 4 \qquad \div 2$$
$$1 \leq x \leq 2$$
$$S = \{x: 1 \leq x \leq 2\} = \{x: x \in [1,2]\}$$



b. $\boldsymbol{|2x - 3| \geq 1}$

Sol:

$$2x - 3 \geq 1 \quad \rightarrow 2x \geq 1 + 3$$
$$2x \geq 4 \qquad \rightarrow x \geq 2$$

Or $2x - 3 \le -1 \quad \rightarrow 2x \le -1 + 3$

$$2x \le 2 \quad \rightarrow x \le 1$$

$$S = \{x : x \ge 2 \;\; or \;\; x \le 1\} = \{x : x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)\}$$

<u>مثال/</u> جد

$$\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$$

الحل/

$$-1 < 5 - \frac{2}{x} < 1$$

$$-1 - 5 < -\frac{2}{x} < 1 - 5$$

$$-6 < -\frac{2}{x} < -4$$

نضرب في $-\frac{1}{2}$ وتقلب الإشارة $\quad -\frac{1}{2} * (-6) > -\frac{1}{2} * (-\frac{2}{x}) > -\frac{1}{2} * (-4)$

$$3 > \frac{1}{x} > 2$$

نقلب الكسر فتنقلب الإشارة $\quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

$$S = \{x : \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$$

<u>تمارين</u>

س1/ جد مجموعة حل المتباينات مع تمثيل الحل كفترة في خط الاعداد

$2x + 16 < x + 25$ (1

الحل/

$$2x - x + 16 < x - x + 25$$
$$x + 16 < 25$$
$$x < 25 - 16 \quad \rightarrow \quad x < 9$$
$$S = \{x: x(9, \infty)\}$$

$6x - 10 > 5x - 16$ (2

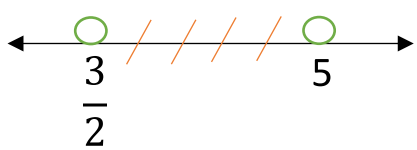
الحل/

$$6x - 5x - 10 > 5x - 5x - 16$$
$$x - 10 > -16$$
$$x > -16 + 10 \quad \rightarrow \quad x > -6$$
$$S = \{x: x(-\infty, -1)\}$$

$-3 < 4x - 9 < 11$ (3

الحل/

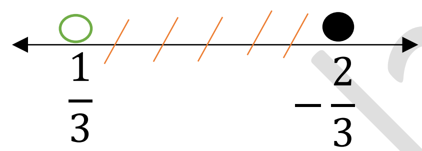
$$-3 + 9 < 4x - 9 + 9 < 11 + 9$$
$$6 < 4x < 20$$
$$\frac{6}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{20}{4} \qquad \div 4$$
$$\frac{3}{2} < x < 5$$
$$S = \left\{x: \frac{3}{2} < x < 5\right\} = \{x: x\left(\frac{3}{2}, 5\right)\}$$



4) $4 \le 5 - 3x < 7$

الحل/

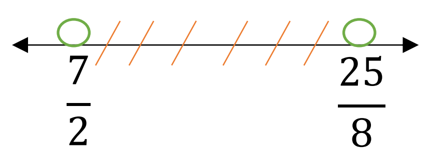
$$4 - 5 \le 5 - 5 - 3x < 7 - 5$$
$$-1 \le -3x < 2$$
$$\frac{1}{3} \le x < -\frac{2}{3}$$
$$S = \{x: x\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\}$$



5) $2 < \frac{1}{x-3} < 8$

الحل/

$$\frac{1}{2} > x - 3 > \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2} + 3 > x - 3 + 3 > \frac{1}{8} + 3$$
$$\frac{7}{2} > x > \frac{25}{8}$$
$$S = \left\{x: \frac{7}{2} > x > \frac{25}{8}\right\} = \{\mathrm{x}: \mathrm{x}\left(\frac{7}{2}, \frac{25}{8}\right)\}$$



6) $4 < \frac{3}{7x-1} < 8$

الحل/

$$\frac{1}{4} > \frac{7x-1}{3} > \frac{1}{8}$$

نضرب بـ 3

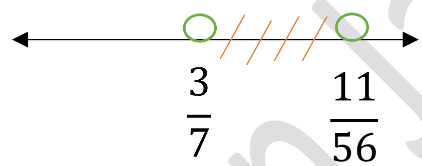
$$\frac{3}{4} > 7x - 1 > \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} + 1 > 7x - 1 + 1 > \frac{3}{8} + 1$$

$$\frac{12}{4} > 7x > \frac{11}{8}$$

$$\frac{3}{7} > x > \frac{11}{56}$$

$$S = \left\{x : \frac{3}{7} > x > \frac{11}{56}\right\} = \left\{x : x\left(\frac{3}{7}, \frac{11}{56}\right)\right\}$$



7) $-3 < 4 - \frac{1}{x} < 2$

الحل/

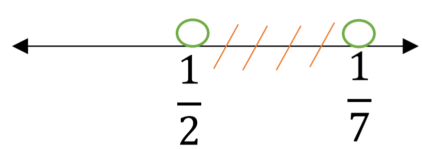
$$-3 - 4 < -\frac{1}{x} < 2 - 4$$

$$-7 < -\frac{1}{x} < -2$$

$$-\frac{1}{7} > -x > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{7} < x < \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{x : \frac{1}{7} < x < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x : x \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$



س2/ حل المتباينات

1) $|x-2|<5$

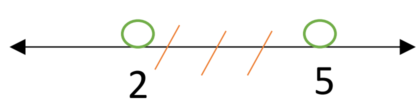
الحل/

$$-5<x-2<5$$
$$-5+2<x-2+2<5+2$$
$$-3<x<7$$
$$S=\{x:-3<x<7\}=\{x:x\in(-3\,,7)\}$$

2) $|2x-7|<3$

الحل/

$$-3<2x-7<3$$
$$-3+7<2x-7+7<3+7$$
$$4<2x<10$$
$$2<x<5$$
$$S=\{x:2<x<5\}=\{x:x\in(2\,,5)\}$$



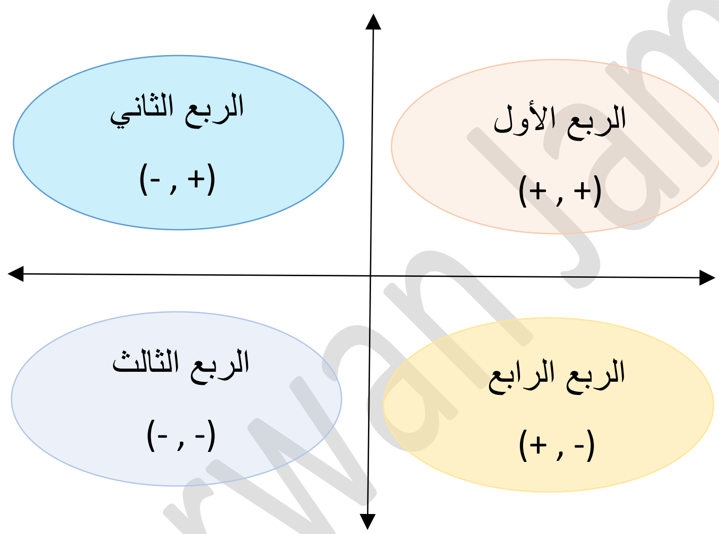
3) $|5x-6|>1$

الحل/

$$5x-6>1$$
$$5x-6+6>1+6$$

$$5x > 7$$
$$x > \frac{7}{5}$$
$$or \qquad 5x - 6 < -1 \quad \rightarrow \quad 5x < 5$$
$$x < 1$$
$$S = \left\{x : x > \frac{7}{5} \;\; or \; x < 1\right\} = \{x : x \in \left(\frac{7}{5}, \infty\right) \cup (-\infty, 1)\}$$

نظام الاحداثيات الديكارتية



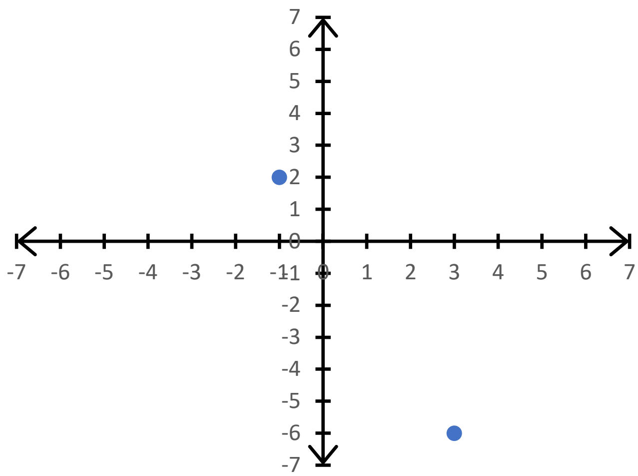
منتصف النقطة

$$P_1(x_1, y_1) \qquad P_2(x_2, y_2)$$
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال/ اذكر الربع الذي يوجد فيه النقطتين Q , P ومثلها في المستوى الديكارتي

$\boldsymbol{Q(3, -6), p(-1, 2)}$

الحل/



$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{2 + (-6)}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{2}{2}, \frac{-4}{2}\right)$$

$$M = (1, -2)$$

المسافة بين نقطتين

$$d = p_1 p_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

معادلة المستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ ميل المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال/ عين معادلة المستقيم المار بالنقطتين $p_2(3,2)$ $p_1(1,4)$

الحل/

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -1(x - 1)$$

$$y - 4 = -x + 1 \quad \rightarrow \quad y + x = 5$$ معادلة المستقيم

مثال/ اوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{2}$ ويقطع محور الصادات عند $\frac{3}{4}$

الحل/

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$2x + 4y = 3$$ معادلة المستقيم

مثال/ جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة p(5,3) ويقطع محور الصادات عند y=5

الحل/

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{0-5} = \frac{-2}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{-2}{5}(x - 0)$$

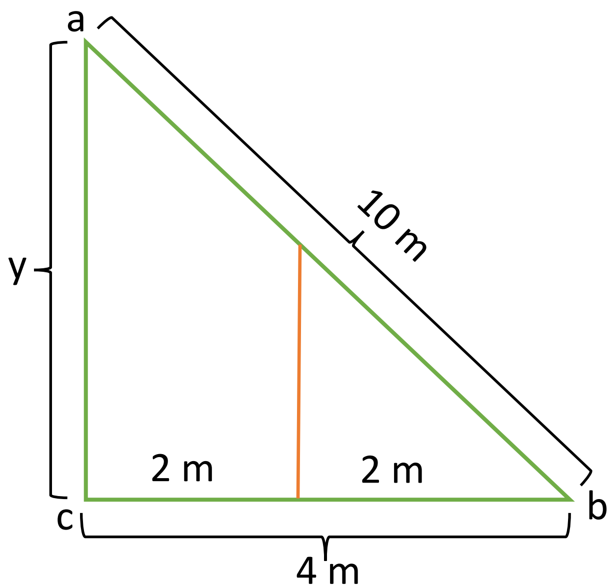
$$y = \frac{-2}{5}x + 5 \qquad * 5$$

$$5y = -2x + 25$$

$$5y + 2x = 25$$ معادلة المستقيم

تمارين

س1/ وضع سلم طوله 10 امتار على الحائط يبعد 4 امتار من قاعدة الحائط , اذا وقف رجل عند منتصف السلم فما هي احداثيات نقطة وقوفه؟



الحل/ من قانون فيثاغورس

$$x^2 + y^2 = (10)^2$$

$$16 + y^2 = 100 \quad \rightarrow \quad y^2 = 100 - 16$$

$$y^2 = 84 \quad \rightarrow \quad y = 8$$

النقطة $(4,8)$

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

$$M = \left(\frac{4}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

$$M = (2,4)$$

س2/ اوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقاط المذكورة مستخدما الميل المعطى للمستقيم

1) m=2 , (5,4)

sol\

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 5)$$

$$y - 4 = 2x - 10$$

$$y - 2x = -6 \qquad \text{معادلة المستقيم}$$

2) $\boldsymbol{m = \frac{-2}{3}}$, $\mathbf{(1, 2)}$

Sol\

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-2}{3}(x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3} \qquad * 3$$

$$3y - 6 = -2x + 2$$

$$3y + 2x = 8$$ معادلة المستقيم

3) $\boldsymbol{m = 0}$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

Sol\

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{4} = 0\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y - \frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{3}{4}$$ معادلة المستقيم

س3/ جد المسافة للنقطتين ثم جد معادلة المستقيم الذي يمر منها $\boldsymbol{p_2}(\mathbf{4,8}$ $\quad \boldsymbol{p_1}(\mathbf{3,2})$

الحل/

$$d = p_1p_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = p_1p_2 = \sqrt{(4-3)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1 + 36}$$

$$d = \sqrt{37}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{4-3} = 6$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 6(x - 3) \quad \rightarrow \quad y - 2 = 6x - 18$$

$y - 6x = 16$ معادلة المستقيم

س4/ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2,3-) وعموديا على محور السينات

الحل/ $p_1(-2{,}0) \quad p_2(-2{,}3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{-2+2} = \frac{3}{0} = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 0(x+2) \quad \rightarrow \quad y - 3 = 0$$

$y = 3$ معادلة المستقيم

الفصل الثاني

الدوال Functions

الدالة هي قاعدة تقابل بين مجموعتين غير خاليتين من العناصر تسميان المنطلق (Domain) والمدى (Range) بحيث ان كل عنصر في المنطلق يقابله عنصر واحد في المدى وكل عنصر في المدى هو المقابل (الصورة) لعنصر واحد على الأقل في المنطلق وغالبا ما تسمى الدالة بالتطبيق (mapping)

الغايات Limits

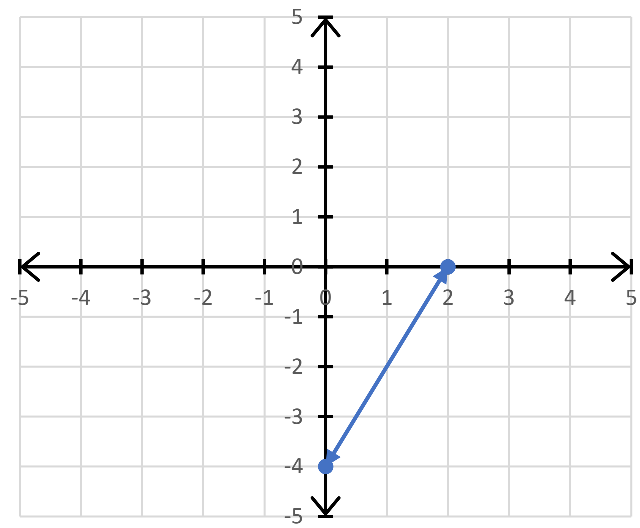
لتكن C نقطة في فترة ما (I) ولتكن f دالة معرفة عند نقطة في (I)

$$\lim f(x) = L \quad , L \in IR$$

م/ الدالة (f) ليس من الضروري ان تكون معرفة ولكن لابد من ان تكون معرفه حول الـ(C)

مثال/ $\boldsymbol{f(x) = 2x - 4}$

N	0.5	0.8	0.9	0.29	1.00	…………
F(x)	-3	-2.4	-2.2	-2.002	-1.998	…………



$$f(x) = 2x - 4$$

$$y = 2x - 4$$

$$x = 0 \quad \rightarrow y = -4 \quad (0, -4)$$

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad (2,0)$$

مثال1/ جد الغاية للدوال

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to 5} 2x + 1 = 11}$

عند التعويض ستكون النتيجة صفر (غير معرفة) وهذا غير صحيح

2) $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}}$

Sol\

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = (1+1) = 2$$

مثال2/ اوجد $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)}{(x-2)}}$

الحل/

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$
$$\lim_{x\to 2}(x+2)=(2+2)=4$$

مثال3/ اوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$ اذا كانت $f(x)=\begin{cases}\mathbf{1}\ , & x\geq \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\ , & x<\mathbf{0}\end{cases}$

الحل/

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

الغاية من اليمين ≠ الغاية من اليسار

<u>تمارين</u>

س1/ جد الغاية للدوال

1) $\lim_{x\to 2} 3x$

الحل/

$$\lim_{x\to 2} 3x=3(2)=6$$

2) $\lim_{x\to 1}(3x-4)$

الحل/

$$\lim_{x\to 1}(3x-4)=(3(1)-4)=-1$$

3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{x}$

الحل/

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{x} = \frac{2}{3}$$

4) $\lim\limits_{x \to 2} |x - 2|$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \forall x \geq 2 \\ 2-x & \forall x < 2 \end{cases}$$

الحل/

$$\lim_{x \to 2}(x-2) = 2-2 = 0$$

$$\lim_{x \to 2}(2-x) = 2-2 = 0$$

$L_1 = L_2$ الغاية موجودة عند الصفر

5) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

الحل/

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 2}(x+3) = (2+3) = 5$$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3-x}{x}$

الحل/

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x^2-1)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0}(x^2-1) = \left((0^2)-1\right) = -1$$

7) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{3-x^2}{\sqrt{3}-x}$

الحل/

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(\sqrt{3}-x)}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}(\sqrt{3}+x)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$$

س2/ اوجد $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

الحل/

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}-1} \quad \to \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\left(\sqrt{x}^{2}\right)-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

س3/ جد غاية الدالة $\boldsymbol{f(x)=|x|}$ **عند x=0 , اذا كانت** $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x \\ -x \end{cases}}$

الحل/

$$\lim_{x\to 0}|x|=x=0$$

$$\lim_{x\to 0}|-x|=x=0$$

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

طرق إيجاد الغايات:

1. **اذا كانت f(x) دالة متعددة الحدود:** على شكل

$$p_n(x) = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ \ldots\ldots + a_nx^n$$

حيث ان a_0 ... ... a_n اعداد حقيقية و n عدد صحيح موجب

مثال/ اذا كانت $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^3 - 5}$ اوجد $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$

الحل/

$$\lim_{x\to 1} x^4 - 2x^3 - 5 = (1)^4 - 2(1)^3 - 5 = -6$$

2. **الدالة الثابتة:** على شكل $\forall x$, $f(x) = k$

مثال/ اذا كانت $\boldsymbol{f(x) = 5}$ اوجد غاية الدالة $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$

الحل/

$$\lim_{x\to 1} 5 = 5$$

3. **دالة ثابتة مع دالة متعددة:** على شكل $\lim_{x\to c} k\ f(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$

مثال/ اوجد $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} 6(x^2 - x + 3)}$

الحل/

$$\lim_{x\to 2} 6(x^2 - x + 3)$$

$$= 6 \lim_{x\to 2}(x^2 - x + 3)$$

$$= 6((2)^2 - 2 + 3) = 30$$

4. **حاصل جمع غايتين:** على شكل $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. **حاصل ضرب دالتين:** على شكل $\lim_{x\to c}\big(f(x).\, g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x)\ .\lim_{x\to c} g(x)$

مثال/ اذا كانت $f(x) = x^3 - 5$ و $g(x) = x + 2$ جد

1) $\lim_{x\to 2} f + g$

الحل/

$$\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3 - 5 = (2)^3 - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 3 + 4 = 7$$

2) $\lim_{x\to 2} f \,.\, g$

الحل/

$$\lim_{x\to 2} f(x) \;.\lim_{x\to 2} g(x)$$

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 5) \;.\lim_{x\to 2}(x + 2)$$

$$((2)^3 - 5)\,.\,(2 + 2) = 3\,.\,4 = 12$$

3) $\lim_{x\to 2} \frac{f}{g}$

الحل/

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} x^3 - 5}{\lim_{x\to 2} x + 2}$$

$$\frac{((2)^3 - 5)}{(2 + 2)} = \frac{3}{4}$$

غايات تحتوي على الوال المثلثية

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

مثال/ جد

1) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$

الحل/

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{2\ sin2\theta}{2\theta}$$

$$2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \quad \to 2\,.(1) = 2$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$ (2

الحل/

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos x}$ (3

الحل/

$$\frac{\lim_{x \to 0} x}{\lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 7x}{\sin 3x}$ (4

الحل/

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{\cos 7x}}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x \cos 7x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x} \cdot \cos 7x} \qquad * \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{7 \sin 7x}{7x}}{\frac{3 \sin 3x}{3x} \cdot \cos 7x} = \frac{7}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \cos 7x}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos 7x}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{7}{3}$$

تمارين

س1/ جد ما يأتي

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

الحل/

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+3}$

الحل/

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x+2}{x^2-3x+2}$

الحل/

$$= \frac{(2)^2-2+2}{(2)^2-3(2)+2} = \frac{2+2}{-2+2} = \frac{4}{0}$$ غير معرفة

4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & -2 \le x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & x > 3 \end{cases}$$

الحل/

الغاية من اليمين $\lim\limits_{x\to 3} x^2-5 = (3)^3-5 = 4$

الغاية من اليسار $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$

$$L_1 = L_2$$

(5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$

الحل/

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \qquad \div x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

(6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

الحل/

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \qquad \text{نضرب في مرافق المقام}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} \qquad \div x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2(1+\cos x)}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)}{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+\cos 0}{1\cdot 1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

(7 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}$

الحل/

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin 2x}{x}$$
$$\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2x} \qquad *2$$
$$\frac{2}{5}\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{5}*1=\frac{2}{5}$$

8) $\lim_{x\to4}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$

الحل/

$$\frac{2-4}{(4-4)(4+2)}=\frac{-2}{0} \qquad \text{غير معرفة}$$

الغايات عند المالانهاية limit of infinity

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=+\infty$

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=-\infty$

الغاية من اليمين $\neq$ الغاية من اليسار وبذلك تكون الدالة غير معرفة

م/ في حالة الدالة النسبية فان إيجاد النهاية عندما $x\to\infty$ سواء كانت موجبة او سالبة يتم قسمة البسط والمقام على اكبر اس للمتغير x يظهر في الدالة

مثال1/ جد $\lim_{x\to\infty}(7x^5-4x^3+2x-9)$

الحل/

$$=\infty \quad \text{غير معرفة}$$

مثال2/ جد $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$

الحل/

$$=\frac{1}{(\infty)^2}=0$$

ظهر الجواب صفر لان عند التعويض في أي رقم يظهر الناتج اقل من المتوقع بكثير

مثال3/ جد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x+6}$

الحل/

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^3+2}{x^3}}}{\frac{x+6}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}}{1+\frac{6}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\infty^3}}}{1+\frac{6}{\infty}} = \frac{\sqrt[3]{1+0}}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>تمارين</u>

س1/ جد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9}$

الحل/

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+3x+6}{x^5}}{\frac{x^5+2x^2+9}{x^5}} \qquad \div\, x^5$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^5}+\frac{3x}{x^5}+\frac{6}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}+\frac{2x^2}{x^5}+\frac{9}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^4}+\frac{6}{\infty^5}}{1+\frac{2}{\infty^3}+\frac{9}{\infty^5}} = \frac{0+0+0}{1+0+0} = \frac{0}{1} = 0$$

س2/ اوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2}$

الحل/

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}$$

$$=\frac{2+\frac{3}{\infty}}{3+\frac{2}{\infty}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

س3/ اوجد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x+6}$

الحل/

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}{\frac{3x+6}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}{\frac{3x}{x}+\frac{6}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3+\frac{6}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\frac{2}{\infty^2}}}{3+\frac{6}{\infty}}=\frac{\sqrt{1+0}}{3+0}=\frac{1}{3}$$

الاستمرارية Continuity

الدالة *f* تكون مستمرة عند النقطة *x = c* اذا تحققت

1. معرفة $f(c)$
2. موجودة $\lim_{x \to c} f(x)$
3. الدالة مستمرة $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

مثال1/ بين فيما اذا كانت الدالة مستمرة عند *x = 2*

1) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}}$

الحل/

1. $f(x \neq 2) = \frac{0}{0}$ غير معرفة

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$$\lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

الدالة غير مستمرة مع *x = 2*

2) $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}}$

الحل/

1. $g(2) = 3$ معرفة

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$

$$\lim_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$$

3) $\boldsymbol{h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}}$

الحل/

1. $h(x = 2) = 4$ معرفة

$$2. \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = h(x=2)$$

4) $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & , \quad x<2 \\ 3x+4 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

الحل/

$$1. \; f(x=2) = 3x+4 = 3(2)+4 = 10$$ معرفة

$$2. \; \lim_{x\to +2} 3x+4 = 3(2)+4 = 10$$

$$\lim_{x\to -2} 3x-4 = 3(2)-4 = 2$$

∴ لا توجد للدالة غاية ∴ الدالة غير مستمرة

مثال2/ اذا علمت ان الدالة *h* مستمرة عند *x=2* جد قيمة *k*

$$\lim_{x\to 2} k\,\frac{x^2-4}{x-2} = h(x=2)$$

الحل/

$$\lim_{x\to 2} k\,\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 2} k(x+2) = 4$$

$$k(2+2) = 4 \quad \rightarrow k = 1$$

الفصل الثالث

الاشتقاق Differentiation

يعتبر الاشتقاق من المفاهيم الرياضية الهامة والتي لها العديد من التطبيقات, مثل حساب ميل المماس, إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة, رسم الدوال وغيرها.

تعريف المشتقة: لنفرض ان $(x, f(x))$ نقطة على رسم الدالة *y=f(x)* واذا كانت $(x+\Delta x\,, f(x+\Delta x))$ نقطة أخرى على رسم الدالة *y=f(x)* حيث Δx هو فرق الاحداثي السيني للنقطتين, فان ميل المستقيم *L* المار بالنقطتين هو:

$$m_L = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x+\Delta x - x}$$

$$m_L = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

قانون المشتقة

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تعريف: لنفرض ان الدالة *f* معرفة على فترة مفتوحة تحتوي على *x* فان المشتقة الأولى *f′* عند *x* تكون بهذه الصورة

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

خطوات لإيجاد المشتقة حسب التعريف

1. $f(x+\Delta x)$
2. $f(x+\Delta x) - f(x)$
3. $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

مثال1/ جد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^2 + 1$ حسب التعريف

الحل/

1. $f(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 1 = x^2 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1$$

2. $f(x+\Delta x) - f(x)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1 - x^2 - 1$$

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2$$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x - 2x = 0$$

مثال2/ جد معادلة المماس للدالة $y = 8 - x^3$ عند النقطة *(1,1)*

الحل/

1. $f(x+\Delta x) = 8 - (x+\Delta x)^3$

$$8 - (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) = 8 - x^3 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3$$

2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 8 - x^3 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3 - 8 + x^3$

$$= -3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3$$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{-3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3}{\Delta x}$

$$= \frac{\Delta x(-3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2)}{\Delta x} = -3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2$$

4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2$

$$f'(x) = -3x^2$$

نعوض بالنقطة *(1,1)* $m_L = f'(x) = -3x^2 = -3(1)^2 = -3$

$$y - y_1 = m_L(x - x_1)$$

$$y - 1 = -3(x - 1)$$

معادلة المماس للمنحني $y + 3x - 4 = 0$

قواعد الاشتقاق

1. مشتقة الدالة الثابتة: اذا كان $f(x) = c$ حيث ان c عدد ثابت فان $f'(x) = 0$

مثال/ جد المشتقة لـ $\boldsymbol{2.\ f(x) = 2^3}$ $\boldsymbol{1.\ f(x) = 5}$

الحل/

$$1.\ f'(x) = 0 \qquad 2.\ f'(x) = 0$$

2. اذا كان $f(x) = x^n$ و $n \in N$ فان $f'(x) = nx^{n-1}$ واذا كانت $f(x) = ax^n$ فان $f'(x) = a\,.\,n\,x^{n-1}$

مثال/ جد المشتقة لـ $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

الحل/

$$f'(x) = 3x^2$$

مثال/ جد المشتقة لـ $\boldsymbol{f(x) = 3x^3}$

الحل/

$$f'(x) = 9x^2$$

3. مشتقة دالة مرفوعة لأس: اذا كان $f(x) = [u(x)]^n$ حيث ان $n \in IR$ فأن $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}\,.\,u'(x)$

مثال/ جد المشتقة لـ $\boldsymbol{y = f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{50}}$

الحل/

$$y' = 50(2x^2 - 4x + 1)^{49}\,(4x - 4)$$

4. مشتقة مجموع عدد منتهي من الدوال القابلة للاشتقاق يساوي مجموع مشتقاته

مثال/ جد المشتقة المتعددة الحدود المعرفة بـ $\boldsymbol{f(x) = 4x^8 - 3x^5 - 10x^2 + Z}$

الحل/

$$f'(x) = 32x^7 - 13x^4 - 20x + 0$$

5. ضرب دالتين: $(f_1 \,.\, f_2)' = f_1 \,.\, f_2' + f_2 \,.\, f_1'$

مثال/ لتكن $\boldsymbol{f(x) = (3x^2 - 5)(7x^3 + 6x + 1)}$

الحل/

$$f'(x) = (3x^2 - 5)(21x^2 + 6) + (7x^3 + 6x + 1)(6x)$$
$$f'(x) = 63x^4 + 18x^2 - 105x^2 - 30 + 42x^4 + 36x^2 + 6x$$
$$f'(x) = 105x^4 - 51x^2 + 6x - 30$$

6. قسمة دالتين: $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_2 \,.\, f_1' - f_1 \,.\, f_2'}{(f_2)^2}$

مثال/ جد $\boldsymbol{y = \frac{2x^4 - 13x + 4}{5x^3 + x}}$

الحل/

$$y' = \frac{[(5x^3 + x)(8x^3 - 13)] - [(2x^4 - 13x + 4)(15x^2 + 1)]}{(5x^3 + x)^2}$$
$$y' = \frac{40x^6 - 65x^3 + 8x^4 - 13x - 30x^6 - 2x^4 + 195x^3 + 13x - 50x^2 - 4}{25x^9 + 10x^4 + x^2}$$
$$y' = \frac{10x^6 + 6x^4 + 130x^3 - 50x^2 - 4}{25x^9 + 10x^4 + x^2}$$

قاعدة السلسلة ***The Chain Rule***

اذا كانت الدالة *g(x)* قابلة للاشتقاق عند النقطة *x* وكانت *f(g(x))* قابلة للاشتقاق عند *g(x)* فان

$$f(g(x))' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

يمكن كتابة النظرية على الصورة المختصرة الاتية:

اذا كانت كل من $y=f(u)$, $u=g(x)$, دوال قابلة للاشتقاق, فان $y = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق, كما ان:

$$f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$f'(x) = f'(u)\,.u'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,.\frac{du}{dx}$$

مثال1/ باستخدام قاعدة السلسلة اوجد مشتقة الدالة $\boldsymbol{y = (2x^2 - 4x + 1)^{50}}$

الحل/

$$y \to u \to x$$

$$y = u^{50} \qquad , \quad u = 2x^2 - 4x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 50u^{49} \qquad , \qquad \frac{du}{dx} = 4x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 50u^{49}\ .(4x-4)$$

مثال2/ جد المشتقة لـ $\boldsymbol{y = sin\frac{2x^2+1}{x-1}}$

الحل/

$$y = \sin u \qquad , \quad u = \frac{2x^2+1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u \quad , \quad \frac{du}{dx} = \frac{(x-1)(4x) - (2x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \cos \frac{2x^2+1}{x-1} \cdot \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$$

الاشتقاق الضمني *Implicit Differentiation*

تعلمنا في دراستنا السابقة مع دوال من الشكل $y = f(x)$, أي ان *y* معطاة كدالة صريحة في المتغير المستقل *x* , ولكن في بعض الأحيان قد يصعب وضع *y* كدالة صريحة في المتغير *x* , بل تكون معرفتها ضمنيا كدالة في *x* على الصورة $f(x,y) = 0$,

للحصول على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ نجري عملية الاشتقاق للمعادلة $f(x,y) = 0$ باعتبار *y* دالة في *x* . فتكون مشتقة *x* هي *1* ومشتقة *y* هي *y′* .

مثال/ اوجد مشتقة $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$ جد $D_x\, y$

الحل/

$$3x^2 + x^2y' + y(2x) - 10 * 4y^3y' = 0$$

$$x^2y' - 40y^2y' = (3x^2 + 2xy)$$

$$y'(x^2 - 40y^2) = -(3x^2 + 2xy)$$

$$y' = \frac{-(3x^2 + 2xy)}{x^2 - 40y^2}$$