خواص الوسط الحسابي :

1- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي = صفر
للبيانات غير المبوبة تكون الصيغة كالاتي

$$\sum(y_i - \bar{y}) = 0$$

اما للبيانات المبوبة فتكون الصيغة كالتالي

$$\sum f_i(y_i - \bar{y}) = 0$$

البرهان للصيغة الاولى :

$$\sum(y_i - \bar{y}) = \sum y_i - \sum \bar{y} = \sum y_i - n\bar{y}$$

$$= \sum y_i - n\frac{\sum y_i}{n}$$

$$= \sum y_i - \sum y_i$$

$$= 0$$

البرهان للصيغة الثانية:

$$\sum f_i(y_i - \bar{y}) = 0$$

$$\sum f_i(y_i - \bar{y}) = \sum f_i y_i - \bar{y}\sum f_i = \sum f_i y_i - \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}\sum f_i$$

$$= \sum f_i y_i - \sum f_i y_i$$

$$\mathbf{= 0}$$

2- مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي **اقل ما يمكن** اي ان :

$$\boldsymbol{min}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

3- عند اضافة عدد ثابت (k) الى كل قيمة من المتغيرات فان وسطها الحسابي = الوسط الحسابي للقيم الاصلية + العدد الثابت(K)

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{k} \rightarrow \bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{y}} + \mathbf{k}$$

4- اذا ضربت قيم المتغير بثابت **(k)** فان متوسط القيم الناتجة يساوي حاصل ضرب الثابت **(k)** بالوسط الحسابي للمتغير

$$\mathbf{A}_i = \boldsymbol{y}_i * \boldsymbol{k} \to \bar{A} = \bar{y} * \mathbf{k}$$

3- الوسيط The Meadian

هو تلك القيمة من قيم المتغير العشوائي X التي تقسم مجموعة من قيم المتغير إلى قسمين متساويين أي أنها قيمة X التي تجعل عدد القيم قبلها مساوٍ لعدد القيم بعدها.

طرق حساب الوسيط:

أ. البيانات غير مبوبة.

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ تمثل مشاهدات متغير عشوائي عددها n، وعلى فرض أن هذه المشاهدات رتبت تصاعدياً إذ إن $(Y_1 < Y_2 < .... < Y_n)$ تمثل قيم المتغير X المرتبة تصاعدياً (وقد يكون ترتيبها تنازلياً) فعندها:

1- إذا كان **عدد القيم n عدد فردي** فإن قيمة الوسيط (بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً) تمثل القيمة التي تسلسلها $(\frac{n+1}{2})$.

2- إذا كان **عدد القيم n عدد زوجي** فقيمة الوسيط (بعد الترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً) تمثل **الوسط الحسابي** للقيم التي تسلسلها $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1)$.

مثال(1):

درجات عينة من الطلاب في امتحان معين

$$X : 80,79,63,65,68,70,53,62,55$$

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً

$$Y : 53,55,62,63,65,68,70,79,80$$
$$n = 9$$

وعليه فإن تسلسل

$$\frac{n+1}{2}=\frac{9+1}{2}=\frac{10}{2}=5$$

إذن قيمة الوسيط هي القيمة التي تسلسلها 5 وهي 65 أي:

$$\therefore M_e = 65$$

مثال(2):

الآتي أعمار عينة من الأفراد قوامها 12 فرد، المطلوب إيجاد الوسيط لعمر الفرد في هذه المجموعة.

$$X : 20,22,19.5,26,24.5,27,28,29,18,20,23,25$$

نرتب هذه القيم ترتيب تنازلي وكالآتي:

$$Y : 29,28,27,26,25,24.5,23,22,20,20,19.5,18$$

$$n = 12$$

وعليه فإن تسلسل

$$\frac{n}{2}=\frac{12}{2}=6 \quad , \quad \frac{n}{2}+1=\frac{12}{2}+1=7$$

إذن القيمتان اللتان تحددان الوسيط هما 24.5، 23 وعليه فإن الوسيط لهذه المجموعة يمثل الوسط الحسابي لهاتين القيمتين أي

$$M_e = \frac{24.5+23}{2} = 23.75 \text{ سنة}$$

مثال (3):

Calculate the median from the following data

61,80,40,10,15,12,20

Sol:

نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً

80 61 40 20 15 12 10

بمان انه (n=7) عددها فردي نحسب ترتيب الوسيط كالاتي

$$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

ترتيب الوسيط هو الرابع

Me= 20

ب. حساب الوسيط للبيانات مبوبة: نحتاج الى ايجاد التكرار المتجمع الصاعد او النازل

أ. في حالة التكرار المتجمع الصاعد:

افرض وجود توزيع تكراري عدد فئاته m وان $f_1, f_2, \ldots, f_m$ يمثل التكرارات المقابلة لفئات التوزيع، وافرض أن $F_1, F_2, \ldots, F_m$ تمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة للحدود العليا لفئات التوزيع. وليكن $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2}$ يمثل ترتيب الوسيط في هذا التوزيع، فاذا كان:

$$F_{k-1} < \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} < F_k$$

عندئذ يقال أن فئة الوسيط هي الفئة التي تسلسلها هو "K" ثم يتم حساب قيمة الوسيط وفق الصيغة التالية:

$$M_e = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2} - F_{k-1}\right]$$

حيث أن:

L_k= الحد الأدنى لفئة الوسيط

f_k= تكرار فئة الوسيط

h_k= طول فئة الوسيط

F_{k-1}= التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط.

نقوم بالخطوات التالية:

1- نوجد التكرار الذي يمثل ترتيب الوسيط $\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2}$
2- نوجد التكرار المتجمع الصاعد او النازل لكل الفئات.
3- نحسب الفئة التي يقع فيها الوسيط $F_k < \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2} < F_{k+1}$
4- تكرار المتجمع الصاعد او (النازل) للفئة الوسيطة.
5- التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطة .
6- طول الفئة الفرق بين الحد الاعلى والحد الادنى للفئة.
7- تطبيق القانون الخاص بحساب الوسيط بتعويض القيم التي تم الحصول عليها فيه.

ملاحظة:

إن هذه الصيغة ممكنة الاستخدام سواء كانت أطوال الفئات للتوزيع متساوية أو غير متساوية وذلك لان قيمة الوسيط تعتمد على فئته التي حددت أصلاً على أساس موقع نصف التكرارات في التوزيع المتجمع الصاعد الذي لا علاقة له بطول الفئة وإنما بالحد الأعلى لها.

مثال:

فيما يلي توزيع تكراري للدخل الشهري لعينة من الأسر حجمها 80 أسرة، جد الوسيط للدخل الشهري للأسرة في هذه العينة.

الفئات	عدد الأسر
100-119	3
120-139	7
140-159	14
160-179	20
180-199	18
200-219	12
220-239	6

الحل:

الفئات	عدد الأسر	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
100-119	3	أقل من او يساوي 119	3
120-139	7	أقل من او يساوي 139	10
140-159	14	أقل من او يساوي 159	24
160-179	20	أقل من او يساوي 179	44
180-199	18	أقل من او ساوي 199	62
200-219	12	أقل من او يساوي 219	74
220-239	6	أقل من أو يساوي 240	80

نجد ترتيب الوسيط وهو مساوي إلى نصف التكرارات أي $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = \frac{80}{2} = 40$ ، نقارن ترتيب الوسيط مع التكرار المتجمع الصاعد حيث نلاحظ أن 24<40<44 وعليه فان فئة الوسيط هي الفئة الرابعة في التوزيع، أي الفئة 179-160، وبذلك فان:

$L_k=160$، $w=20$، $f_k=20$، $F_{k-1}=24$

وعندئذ فان:

$$M_e = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2} - F_{k-1}\right]$$

$$= 160 + \frac{20}{20}\left[\frac{80}{2} - 24\right] = 160 + 16 = 176$$

ب. في حالة التكرار المتجمع النازل:

يمكن إيجاد الوسيط من صيغة مشتقة من التوزيع التكراري المتجمع النازل وكما يلي:

$$M_e = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left[F_{k-1} - \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2}\right]$$

حيث أن:

L_k= تمثل الحد الحقيقي الأدنى لفئة الوسيط

f_k= تكرار فئة الوسيط

h_k= طول فئة الوسيط

F_{k-1}= التكرار المتجمع النازل السابق لترتيب الوسيط

مثال:

من بيانات المثال السابق جد الوسيط باستخدام التوزيع التكراري المتجمع النازل.

الحل:

نجد التوزيع التكراري المتجمع النازل وكما يلي:

الفئات	التكرار	الحدود الدنيا للفئات	التكرار المتجمع النازل
100-119	3	أكبر من أو يساوي 100	80
120-139	7	أكبر من أو يساوي 120	77
140-159	14	أكبر من أو يساوي 140	70
160-179	20	أكبر من أو يساوي 160	56
180-199	18	أكبر من أو يساوي 180	36
200-219	12	أكبر من أو يساوي 200	18
220-239	6	أكبر من أو يساوي 220	6

نجد ترتيب الوسيط وهو مساوي إلى نصف مجموع التكرارات إلى 40 وحيث إن 56>40>36، فان فئة الوسيط هي الفئة الرابعة، أي 160-179

$L_k=160$، $h_k=20$، $f_k=20$ ،$F_{k-1}=56$

$$M_e = 160 + \frac{20}{20}\left[56 - \frac{80}{2}\right] = 160 + 16 = 176$$

<u>طريقة اخرى لايجاد الوسيط</u> هو عن طريق الرسم من جدول التكراري التجميعي الصاعد والنازل معاً

- **<u>المنوال The mode:</u>**

يعرف بأنه تلك القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها من بين مجموعة من القيم أو أنها القيمة الشائعة من بين مجموعة من القيم ويرمز له بالرمز M_o ويسمى أيضا القمة.

طرق حساب المنوال:

أ. حساب المنوال للبيانات غير المبوبة:

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ تمثل قياسات عينة من المشاهدات قوامها n . فإن المنوال لهذه المشاهدات هو المشاهدة أو القيمة الأكثر تكراراً بين هذه المشاهدات.

ملاحظة:

في بعض الأحيان يتضح بأنه قد يكون هنالك منوالاً واحداً (قمة واحدة) لهذه المشاهدات وعندها يسمى التوزيع وحيد القمة أو وحيد المنوال أو يكون لها منوالين (قمتين) وعندها يسمى التوزيع ذو قمتين وقد يكون لها أكثر من منوالين في بعض الأحيان كما انه قد لا يوجد منوال للمشاهدات.

مثال:

أوجد المنوال لكل من البيانات الآتية:

أ.

$$X : 5,2,6,5,9,5,8,3,6$$

المشاهدة 5 هي أكثر المشاهدات تكراراً إذن المنوال هو $M_o = 5$

ب.

$$X : 51.6,47.7,50.3,49.5,48.9$$

لا يوجد لهذه المشاهدات منوال.

ج-

X=5,2,2,6,5,2,9,5,8,3,6

يوجد منوالين لهذه المشاهدات وهي 5, 2

ب. حساب المنوال للبيانات المبوبة:

حساب المنوال

لنفترض أن هنالك توزيعاً تكرارياً عدد فئاته m وإن f_k يمثل أكبر تكرار في هذا التوزيع، في هذه الحالة فان المنوال هو الفئة التي تحوي أعلى تكرار .

وأن f_{k-1} =التكرار السابق لتكرار فئة المنوال

و f_{k+1} = التكرار اللاحق لتكرار فئة المنوال

وهذا يعني أن $f_{k-1}<f_k<f_{k+1}$

وإن h_k = طول فئة المنوال و L_k يمثل الحد الأدنى لفئة المنوال

عندئذ يمكن حساب المنوال للتوزيع من خلال الصيغة التالية:

$$Mo = L_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{(f_k - f_{k-1}) + (f_k - f_{k+1})} \times h_k$$

فاذا كان f_k يمثل أكبر تكرار في هذا التوزيع، عندئذ فان فئة المنوال هي الفئة L_k-L_{k+1}.

مثال:

الاتي توزيع تكراري لأطوال عينة من الأشخاص البالغين حجمها 50 شخص. يطلب حساب القيمة الشائعة لطول الشخص في هذه العينة (أيجاد المنوال للتوزيع).

عدد الأشخاص	فئات الطول
8	150-159
12	160-169
15	170-179
9	180-189
6	190-199

الحل:

بما أن أكبر تكرار في التوزيع هو15، فان فئة المنوال هي 170−179، أي الفئة الثالثة.

$15=f_3=f_k$ يمثل اكبر تكرار، f_{k-1} = التكرار السابق = $12=f_2$

التكرار اللاحق لتكرار فئة المنوال = f_4 = $9=f_{k+1}$

L_k=الحد الأدنى لفئة المنوال=L_3=170، h_k=طول فئة المنوال=h_3

$$Mo = L_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{(f_k - f_{k-1}) + (f_k - f_{k+1})} \times h_k$$

$$Mo = 170 + \frac{15-12}{(15-12)+(15-9)} \times 10$$

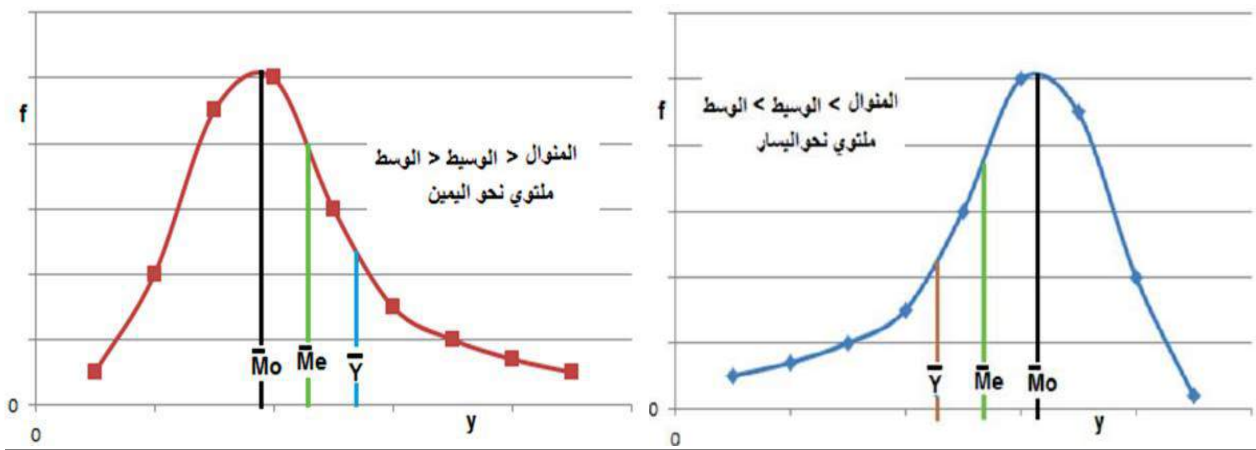
$$= 170 + \frac{3}{3+6} \times 10 = 173.33$$

العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

أ - في التوزيعات غير المتماثلة (الملتوية) : لوحظ وجود علاقة خطية تقريبية بين مقاييس التمركز الثلاثة، وهي

الوسط – المنوال = 3 (الوسط – الوسيط)

ويكون شكل العلاقة بين تلك المقاييس في التوزيعات الملتوية بالشكلين الآتيين.



إذا كان التوزيع التكراري (غير متماثل) ففي هذه الحالة فقط يمكن ربط الوسط الحسابي والوسيط والمنوال بعلاقة رياضية واستخراج أحد هذه المقاييس الثلاثة في حالة توفر المقياسين الآخرين وتعذر الحصول على الثالث وهذه العلاقة هي:

$$\bar{X} - M_e = \frac{1}{3}(\bar{X} - M_o)$$

$$\therefore \ \bar{X} = \frac{3M_e - M_o}{2}$$

يستخدم هذه القانون في حالة تعذر الحصول على $\bar{X}$.

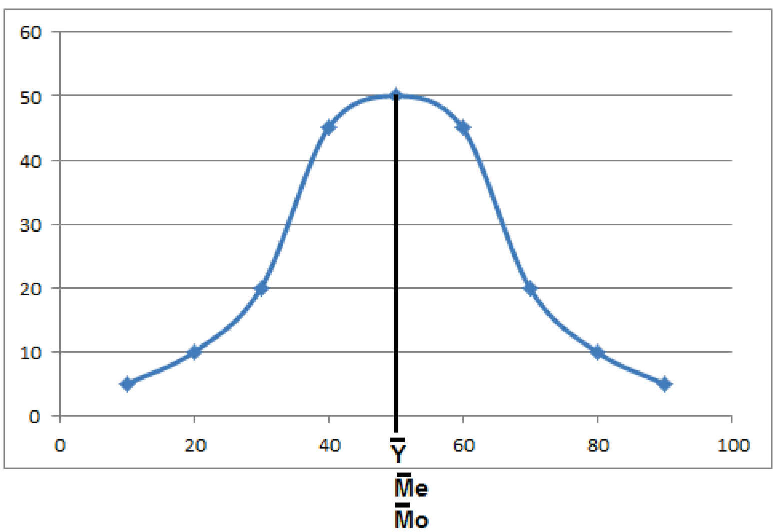
اما الوسيط نحصل عليه من الصيغة التالية :

$$\therefore M_e = \frac{2\,\overline{X} + M_o}{3}$$

والمنوال من الصيغة التالية :

$$\therefore M_o = 3M_e - 2\,\overline{X}$$

ب- **في حالة كان التوزيع متماثل تماماً فيكون** $(\overline{X} = M_e = M_o)$



مثال:

تعذر في احد التوزيعات القريبة من حالة التماثل (الملتوية) الحصول على قيمة للوسط الحسابي في حين أمكن الحصول على قيمة المنوال والوسيط حيث كانتا $M_o = 53$, $M_e = 52$ ، جد قيمة الوسط الحسابي.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{3M_e - M_o}{2} = \frac{3(52) - 53}{2} = \frac{156 - 53}{2} = 51.5$$
$$\therefore \overline{X} = 51.5$$

واجب(1):

الآتي توزيع تكراري لعينة من الأسر حسب أفراد الأسرة، المطلوب حساب الوسيط لعدد أفراد الأسرة. المطلوب ايجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

الفئات	التكرار f_i
2-4	6
5-7	9
8-10	12
11-13	20
14-16	14
17-19	11
20-22	8
	80

واجب(2):

الآتي توزيع تكراري يمثل توزيع 40 عائلة فلاحية حسب ملكيتها من عدد أشجار البرتقال، المطلوب إيجاد المنوال لهذا التوزيع.

الفئات	التكرار
60−74	8
75−89	10
90−104	14
105−119	6
120−134	2

واجب (3):

احسب الوسط الحسابي والوسيط للدرجات التالية : 10-4-17-8-2-3-5

من قيمة الوسط والوسيط احسب قيمة المنوال ثم حدد التواء التوزيع؟

Measures of Variation or Dispersion

مقاييس التغير او التشتت

Dispersion Measures: It describes the level in the data about the central tendency location.

ويقصد به التباعد او التقارب الموجود بين قيم المشاهدات عن وسطها وكلما كان التشتت كبير دل ذلك على عدم التجانس بين القيم .

لان الوسط لايعطي صورة كاملة عن البيانات بالنسبة الى مجموعتين من البيانات

A : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

B: 9,1,0,10

عند حساب الوسط الحسابي لكل من المجوعتين نلاحظ انه يساوي 5

ولكن تغير المجموعة الاولى اقل من المجموعة الثانية وكلما قل التغير او التشتت اصبح للوسط اهمية اكبر هندسيا وعليه لابد من وجود مقاييس تبين مدى تغير البيانات فيما بينها ومدى التفاوت في المجموعة المعينة من هذه البيانات ، وهذه المقاييس تسمى بمقاييس التغير او التشتت واهمها :

1- المدى Range.
2- الانحراف المتوسط Mean Deviation(M.D) .
3- تباين العينة وانحرافها المقياسي او المعياري Variation and Standard Deviation.
4- معامل التباين او معامل الاختلاف Coefficient of Variation(C.V).

1- **<u>المدى Range</u>** : هو الفرق بين اكبر قيمة واقل قيمة للبيانات
ـــ في حالة البيانات غير المبوبة يتم حسابه وفق الصيغة التالية

$$R = y_{i\,max} - y_{i\,min}$$

EX:
X: 1,2,4,12,11,9,8

R=12-1=11

ـــ في حالة البيانات المبوبة فان المدى يمثل الفرق بين الحد الاعلى والحد الادنى للتوزيع التكراري .

EX:

Find the Range of the weights of 100 students at the University of Mosul.

weights	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
fi	5	18	42	27	8

Sol:

$R = y_U - y_L$

$R = 74 - 60 = 14$

2- **الانحراف المتوسط Mean Deviation(M.D):** هو متوسط الانحرافات المطلقة للبيانات عن وسطها الحسابي .

أ- في حالة البيانات غير المبوبة تكون صيغته كالاتي :

$$M.D = \frac{\sum|y_i - \bar{y}|}{n}$$

حيث ان $\bar{y}$: الوسط الحسابي

EX:

Find the mean deviation of the following two groups.

Yi= 5,18,10,15,3,7,6,12 n=8

Yi= 9,3,8,8,9,8,9,18 n=8

SOL:

For group (1)

$$M.D = \frac{\sum|y_i - \bar{y}|}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{5 + 18 + 10 + 15 + 3 + 7 + 6 + 12}{8} = 9.5$$

$$M.D = \frac{|5 - 9.5| + |18 - 9.5| + \cdots + |12 - 9.5|}{8} = 42.5$$

For group (2)

$$M.D = \frac{\sum|y_i - \bar{y}|}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{9+3+8+8+9+8+9+18}{8} = 9$$

$$M.D = \frac{|9-9| + |3-9| + \cdots + |18-9|}{8} = 2.25$$

ب- في حالة البيانات المبوبة فان صيغة الانحراف المتوسط تكون كالاتي :

اذا كان $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ تمثل مراكز فئات وان $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$ تمثل تكراراتها فان :

$$M.D = \frac{\sum f_i|y_i - \bar{y}|}{\sum f_i}$$

EX:

Find the mean deviation of the weights of 100 students at the University of Mosul

weights	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
fi	5	18	42	27	8

SOL:

weights	fi	yi	fi*yi	$\lvert y_i - \bar{y}\rvert$	$f_i\lvert y_i - \bar{y}\rvert$
60-62	5	61	305	$\lvert 61 - 67.45\rvert = 6.42$	6.45*5=32.25
63-65	18	64	1152	3.45	62.10
66-68	42	67	2814	0.45	18.9
69-71	27	70	1890	2.55	68.85
72-74	8	73	584	5.55	44.4
	100		6745		226.5

$$M.D = \frac{\sum f_i|y_i - \bar{y}|}{\sum f_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$M.D = \frac{226.5}{100} = 2.26\ kg.$$

3- تباين العينة وانحرافها المقياسي او المعياري Variation and Standard Deviation.

Standard Deviation(S.D): is a widely used measurement of variability or diversity used in statistics and probability theory. It shows how much variation or dispersion there is from the mean –(S) the sample variance , (σ) the population variance.

أ- في حالة البيانات غير المبوبة تكون الصيغة كالاتي :

تباين العينة

$$S^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Or:

$$S^2 = \frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1}$$

اما تباين المجتمع فتكون صيغته كالاتي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum(y_i - \mu)^2}{N}$$

حيث ان N: عدد مفردات المجتمع.

μ : تمثل الوسط الحسابي للمجتمع.

وان الانحراف القياسي او المعياري (S.D)هو الجذر التربيعي للتباين :

الانحراف القياسي او المعياري للعينة $S.D = \sqrt{S^2}$

الانحراف القياسي او المعياري للمجتمع $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

ب- في حالة البيانات المبوبة تكون الصيغة كالاتي :

تباين العينة

$$S^2 = \frac{\sum f_i(y_i - \bar{y})^2}{\sum f_i - 1}$$

OR

$$S^2 = \frac{\sum f_i y_i^2 - \frac{(\sum f_i y_i)^2}{\sum f_i}}{\sum f_i - 1}$$

الانحراف القياسي او المعياري للعينة هو الجذر التربيعي لتباين العينة .

$$S.D = \sqrt{S^2}$$

EX(1): مثال في حالة البيانات غير المبوبة

Find the Variation and Standard Deviation of the following data: $y_i = 9, 8, 6, 5, 7$

Sol:

y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
9	9-7=2	4
8	1	1
6	-1	1
5	-2	4
7	0	0
35		10

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

$$S^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{10}{5-1} = 2.5$$

$$S.D = \sqrt{S^2} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

Or

$SS = (9^2 + 8^2 + 6^2 + 5^2 + 7^2) - \frac{(35)^2}{5} = 225 - \frac{(35)^2}{5} = 10$ (المقدار المتمثل بالبسط) SS تمثل مجموع المربعات

$$S^2 = \frac{10}{5-1} = 2.5$$

$$S.D = \sqrt{S^2} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

EX(2): **مثال في حالة البيانات المبوبة**

Find the Variation and Standard Deviation of the frequency distribution table:

class	fi
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
	100

Sol:

class	fi	yi	fi*yi	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$f_i(y_i - \bar{y})^2$
60-62	5	61	305	-6.45	41.6025	208.0125
63-65	18	64	1125	-3.45	11.9025	214.245
66-68	42	67	2814	-0.45	0.2025	8.505
69-71	27	70	1890	2.55	6.5025	75.5675
72-74	8	73	584	5.55	30.8025	246.42
	100		$\sum f_i y_i = 6745$			852.75

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i\, y_i}{\sum \boldsymbol{f_i}} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum f_i (y_i - \bar{y})^2}{\sum f_i - 1} = \frac{852.75}{100 - 1} = \frac{852.72}{99} = 8.6}$$

$$S.D = \sqrt{S^2} = \sqrt{8.6} = 2.9$$

او ممكن حل المثال باستخدام الصيغة الثانية

class	fi	yi	fi*yi	y_i^2	$fi * y_i^2$
60-62	5	61	305	3721	18605
63-65	18	64	1125	4096	73728
66-68	42	67	2814	4489	188538
69-71	27	70	1890	4900	132300
72-74	8	73	584	5329	42632
	100		$\sum f_i y_i = 6745$		$\sum fi * y_i^2 = 455803$

SS=455805 - $\frac{(6745)^2}{100}$

$$S^2 = \frac{ss}{\sum f_i - 1} = \frac{852.75}{100-1} = 8.6$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{8.6} = 2.9$$

ملاحظة :

قيمة التباين Variation دائما تكون موجبة.

4- معامل التباين او معامل الاختلاف او معامل التغاير .Coefficient of Variation(C.V)

Is a normalized quantity based on the standard deviation and the mean .It is a dimensionless quantity

$$C.V. = \frac{S.D}{\overline{X}} * 100$$

EX:

نتائج الامتحانات النهائية لمادتين في الصف الثاني كانتا كما موضح بالجدول التالي :

	الرياضيات	الحاسوب
الوسط الحسابي	78	73
الانحراف القياسي	8	7.6

الحل:

بالرياضيات $C.V_M. = \frac{8}{78} * 100 = 10.25\%$

بالحاسوب $C.V_C. = \frac{7.6}{73} * 100 = 10.41\%$

يلاحظ ان التشتت في درجات مادة الحاسوب كان اكثر من الرياضيات .

Properties of Variation and Standard Deviation خواص التباين والانحراف القياسي

1- عند اضافة او طرح عدد ثابت (K) الى (من)قيم المشاهدات ، فانه لايؤثر على قيمة التباين والانحراف القياسي لتلك المشاهدات .

If $X_i = Y_i + K$ Or $X_i = Y_i - K$

$Then \quad S_X^2 = S_Y^2$

and $S_X = S_Y$

EX:

Yi = 8, 3, 2, 12, 10;

$\sum Y_i = 35$

$Y_i^2 = 64,9,4,144,100$

$\sum Y_i^2 = 321$

Xi = yi + 3= 11, 6, 5, 15, 13

$\sum X_i = 50$

$X_i^2 = 121,36,25,225,169$

$\sum X_i^2 = 576$

$$S = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1}} \; ; S_y = \sqrt{\frac{321 - \frac{(35)^2}{5}}{4}} = \sqrt{19}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{576 - \frac{(50)^2}{5}}{4}} = \sqrt{19}$$

$$\rightarrow \quad S_y = S_X$$

2- اذا ضربت كل قيمة من قيم المشاهدات بعدد ثابت(**k**) فان:

ـ تباين القيم الناتجة = تباين القيم الاصلية * مربع **(K)**

ـ الانحراف القياسي للقيم الناتجة = الانحراف القياسي للقيم الأصلي * **(K)**

If Xi = yi * k then $S_x^2 = S_y^2 * k^2$ or $S_x = k * S_y$

اما اذا كان حاصل جمع متغيرين فان :

If $Z_i = y_i + X_i$ then $S_Z^2 = S_y^2 + S_X^2$

الدرجة القياسية Standardized Scores

عندما يتم المقارنة بين مفردتين من مجموعتين مختلفتين يستوجب تحويلهما الى وحدات قياسية لاجل ان تكون تلك المقارنة ذات مرجعية قياسية وذو دلالة حقيقية، ويتم ذلك من خلال التحويل الى الدرجة القياسية التي تحسب وفق العلاقة:

$$Z_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s}$$

مثال : حصل طالب على درجة (84) في مادة الرياضيات التي متوسط درجات الطلبة فيها هو (76) وبانحراف قياسي قدره (10)، وفي مادة الفيزياء (90) التي متوسط درجات الطلبة فيها (82) وبانحراف قياسي (16)، ففي أي من الموضوعين كانت قابلية هذا الطالب اعلى؟

الحل:

$$Z_1 = \frac{84-76}{10} = 0.8$$

$$Z_2 = \frac{90-82}{16} = 0.5$$

يتضح ان قابلية الطالب في الرياضيات اعلى من الفيزياء