التحليل العددي

الفصل الأول / الأخطاء ومصادرها

التحليل العددي : هو الموضوع المتعلق بدراسة الطرق العددية المستخدمة في ايجاد الحلول العددية التقريبية والمبرهنات المتعلقة بها.

الخوارزمية : هي مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية مهمة بشكل يؤدي لحل المسألة المعطاة بعدد محدد من الخطوات.

الأخطاء : بما ان الحل العددي لمسألة ما يكون عادةً قيمة تقريبية للحل المضبوط لتلك المسألة لذا تكون هذه القيمة محملة بالأخطاء من المهم قياسها لمعرفة دقة الحل العددي ويعرف الخطأ بصورة عامة بأنه حاصل طرح القيمة التقريبية من القيمة المضبوطة ولأجل تقليل الخطأ في الحل العددي علينا معرفة المصادر المسببة لهذا الخطأ.

مصادر الأخطاء : أن الخطأ الحاصل في الحل التقريبي لمسألة هو غالبا ما يكون بسبب تراكم عدة انواع من الأخطاء ويمكن تصنيف هذه الأنواع كالآتي:

1. **أخطاء الصياغة (Formulation Errors)**

غالباً ما نأخذ المشكلة الأساسية بشكل مبسط أي قد تهمل بعض المؤثرات والعوامل اذا رأينا أنها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الأساسي للمشكلة، ان النتائج التي نحصل عليها من هذا النموذج المبسط تكون عادةً محملة بأخطاء تسمى أخطاء الصياغة.

2. **الأخطاء الصلبية (المتأصلة أو الكامنة) (Inherent Errors)**

في مختلف المسائل العلمية يتم الحصول على بيانات المشكلة بالملاحظة أو بالقياس وبما أن الدقة في هاتين الحالتين محدودة لذا نجد ان هذه البيانات تكون محملة بالأخطاء فيطلق عليها الأخطاء الصلبية أو الكامنة كما في أخطاء الناتجة عن عدم دقة القياسات مثل قراءات بعض الأجهزة في التجارب المختبرية التي تتأثر بالعوامل الفيزيائية مثل الحرارة الضغط الجوي وإلخ. يمكن التقليل من الأخطاء المتأصلة من خلال أخذ بيانات أفضل أو باستخدام مهارات الحوسبة.

3. **الأخطاء الحسابية (Computational Errors):** تتمثل بـ

أ. أخطاء البتر (Truncation Error): وهو الخطأ الناشئ عن استبدال عملية غير منتهية بعملية منتهية مثل عند حساب قيمة دالة معرفة بشكل متسلسلة غير منتهية فإن قيمة الدالة لا يمكن حسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة بل نتوقف عند حد معين هذا التوقف يولد خطأ في قيمة الدالة

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

$$f(2) = \sin 2 = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \cdots + \frac{2^n}{n!}$$

ب. أخطاء التدوير (التقريب) Round of Error: ينتج هذا الخطأ عن تقريب الكسور العشرية ذات المراتب العشرية العددية الى أعداد ذات مراتب عشرية تتناسب مع طبيعة المسألة والدقة المطلوبة .

$$y = 0.3333333333 \ldots. \quad \cong 0.333$$

أو عند تقريب

$$3.145926 \cong 3.1459$$

أو عند تقريب

$$0.52357124 \cong 0.524$$

فخطأ التدوير والتقريب هو بمثابة الفارق بين العددين.

4. **الخطأ المتراكم Accumulated Error:** بعض الطرق العددية تتضمن تكراراً في العمليات الحسابية بخطوات متعاقبة ، الخطأ يزداد في كل خطوة بالاعتماد على الحسابات للقيم التقريبية المحسوبة من الخطوات السابقة مما يسبب بالنتيجة خطأ يسمى بالخطأ المتراكم.

أنواع الأخطاء: تحسب بنوعين هما:

الخطأ المطلق :لتكن a قيمة مضبوطة و a^* قيمة تقريبية لها عندئذ يعرف الخطأ المطلق بـ:

$$e_a = E = |a - a^*|$$

الخطأ النسبي: يعرف الخطأ النسبي بـ:

$$\delta_a = Er = \frac{|a - a^*|}{|a|} \qquad , \qquad |a| \neq 0$$

$$= \frac{e_a}{|a|}$$

ملاحظة: الخطأ النسبي أفضل من الخطأ المطلق لأنه يعطي نتائج أدق ولكن يجب التعامل مع الخطأ النسبي عندما تكون القيمة الحقيقية للجذور قريبة من الصفر.(يكون الخطأ قيمة موجبة دائما)

مثال :اذا كان جذر المعادلة معطى وهو(a=2.66) وباستخدام طريقة عددية يتم إيجاد جذور المعادلة وهو (a^*=2.61) فما هو الخطأ المطلق E والخطأ النسبي Er ؟

E=|a-a^*|=|2.66-2.61|=0.05

Er=e_a/|a|=0.05/2.66=0.018796992

الأخطاء في العمليات الحسابية: لتكن x وy قيم حقيقية (مضبوطة) ولتكن (x^*) و (y^*) قيم تقريبية . فأن الخطأ المطلق والنسبي للعمليات الحسابية $(+,-,\times,\div)$ هي كما يلي:

1. عملية الجمع :

$$e_{x+y} = (x+y)-(x^*+y^*)$$

$$= (x-x^*)+(y-y^*) = e_x + e_y$$

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{e_x+e_y}{x+y}$$

$$e_x = |x-x^*|$$

$$\Longrightarrow \; e_x = x - x^* \Rightarrow x = e_x + x^*$$

$$\Rightarrow x^* = xe_x$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} \Rightarrow \; e_x = x\delta_x \;\&\; e_y = y\delta_y$$

$$\delta_{x+y} = \frac{x\delta_x + y\delta_y}{x+y}$$

2. عملية الطرح :

$$e_{x-y} = (x-y)-(x^*-y^*)$$

$$= (x-x^*)+(y-y^*) = e_x - e_y$$

$$\delta_{x-y} = \frac{x\delta_x - y\delta_y}{x-y}$$

3. عملية الضرب:

$$e_{xy} = (xy) - (x^*y^*)$$

$$= xy - (x - e_x)(y - e_y) = \cancel{xy - xy} + ye_x + xe_y - \cancel{e_x e_y}$$

$$= xe_y + ye_x$$

$$\delta_{xy} = \frac{e_{xy}}{xy} = \frac{xe_y + ye_x}{xy} = \frac{xe_y}{xy} + \frac{ye_x}{xy} = \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

4. عملية القسمة:

$e_{\frac{x}{y}} = ?$ $\delta_{\frac{x}{y}} = ?$ H.W

مثال : لتكن $x = 2.19\,, y = 3.5\,, x^* = 2.23\,, y^* = 3.48$ جد الخطأ المطلق Absolute Error والخطأ النسبي Relative Errors لكل من $e_{x/y}$ و δ_{xy} .

الحل :

$$e_x = |x - x^*| = |2.19 - 2.23| = 0.04$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \left|\frac{0.04}{2.19}\right| = 0.0183$$

$$e_y = |y - y^*| = |3.5 - 3.48| = 0.02$$

$$\delta_y = \frac{e_y}{y} = \left|\frac{0.02}{3.5}\right| = 0.0057$$

$$e_{x/y} = \frac{x}{y}\left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right) = \frac{x}{y}(\delta_x - \delta_y) = \frac{2.19}{3.5}\left(\frac{0.04}{2.19} - \frac{0.02}{3.5}\right) = 0.0079$$

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y = 0.0183 + 0.0057 = 0.0240$$

③ جذور المعادلة حسب رتبة المعادلة .
④ جذر الدالة هو نقطة تقاطع الدالة مع المحور (X) .

الفصل الثاني

الحل العددي للمعادلات غير الخطية

في هذا الفصل نناقش الحل العددي للمعادلات والأنظمة غير الخطية مثل : ($X^2 - 4\sin(X) = 0$) ،

$$\left.\begin{array}{l} X_1^2 - X_2 + 0.25 = 0 \\ -X_1^2 + X_2^2 - 0.1 = 0 \end{array}\right\} \text{أنظمة}$$

يهتم هذا الفصل في أيجاد جذر المعادلة غير الخطية أي قيمة (X) التي تجعل المعادلة $f(x) = 0$.

مثال : المعادلة $X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 15X + 18 = 0$

$$(X+2)(X-3)^2(X+1) = 0$$

$X = -2$

$X = 3$ مكرر

$X = -1$

كيفية تحديد القيمة الأولية للجذر :

١- نظرية القيمة الوسطى :

لتكن $f(x)$ دالة معرفة في الفترة $[a,b]$ اذا $f(x)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق وأن $f(a)$, $f(b)$ مختلفتين في الأشارة عندئذ يوجد على الأقل جذر واحد في الفترة $[a,b]$.

مثال : جد مواقع الجذور للمعادلة: $[f(x)=x^4-7x^3+3x^2+26x-10=0]$ في الفترة $[-8,8]$

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	+	+	+	+	−	+	−	+	+

$f(0)=0^4-7(0)+3(0)+26(0)-10=-10$

الجذور تقع في الفترات

$[-2,0]$, $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$

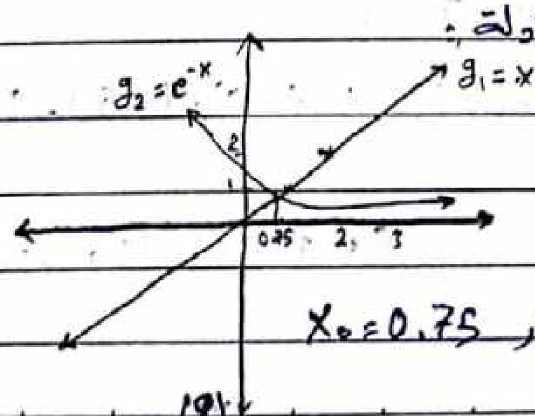
٢- طريقة الرسم :

يمكن أستخدام الرسم في أيجاد القيمة الابتدائية للجذر ، مثل أيجاد جذر المعادلة :

$f(x)=x-e^{-x}$

$g_1(x)=x$

$g_2(x)=e^{-x}$



قيمة أولية للجذر $x_0=0.75$

طرق حل المعادلات غير الخطية :

١- طريقة تنصيف الفترات : Bisection Method

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $[a,b]$ بحيث

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

فان طريقة تنصيف الفترات تعتمد على أيجاد منتصف الفترة (C) بين b , a بأستخدام القانون :

$$C = \frac{a+b}{2}$$

فأذا كانت $[f(c) \cdot f(a) < 0]$ فان الجذر يقع في الفترة $[a, c]$

والا اذا كانت $[f(c) \cdot f(b) < 0]$ فان الجذر يقع في الفترة $[c,b]$

مثال/ جد جذر المعادلة : $[f(x) = x \sin x - 1]$ في الفترة $[0, 2]$

الحل/

$$f(0) = -1$$

$$f(2) = 2\sin(2) - 1 = 0.8186$$

$$C_1 = \frac{0+2}{2} = \boxed{1}$$

$$f(C_1) = 1\sin(1) - 1 = -0.1585$$

أذن الجذر يقع في الفترة $[1, 2]$.

$$C_2 = \frac{2+1}{2} = \boxed{1.5}$$

$$f(C_2) = f(1.5) = 1.5\sin(1.5) - 1 = +0.4962$$

أذن الجذر يقع في الفترة $[1, 1.5]$

خواص طريقة تنصيف الفترات:

1- التقارب لطريقة تنصيف الفترات بطيء جداً ومعدل التقارب يكون خطي.

2- طريقة تنصيف الفترات لا تستطيع ايجاد الجذور العقدية لمتعددات الحدود.

3- اذا كانت أحد قيم الفترة $[a,b]$ قريبة من الجذر فأننا نحتاج الى عدد كبير من التكرارات للوصول الى الحل.

4- اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة ومعرفة في الفترة $[a,b]$ وكانت (X) جذر حقيقي للدالة فأن:

$$|C_n - X| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

حيث (n) = عدد التكرارات.

2 - طريقة الموقع الوهمي : [False Position Method]

لتكن $f(x)$ دالة معرفة في الفترة $[x_1, x_2]$ باستخدام معادلة المستقيم بين نقطتين نحصل على (x, y)

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث : $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f(x_2)$

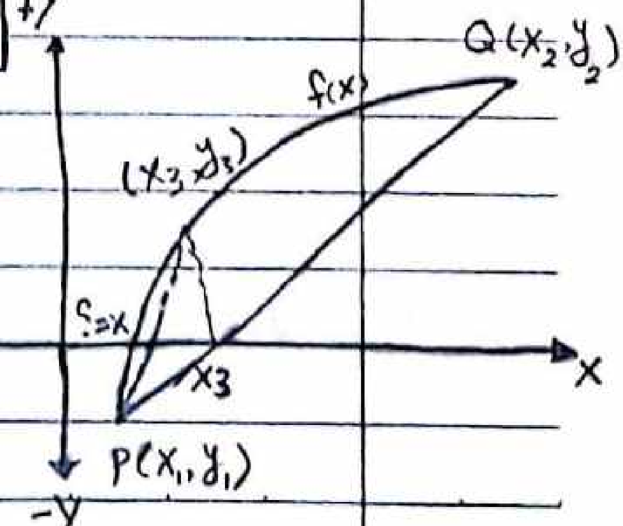
بما أن الجذر هو قيمة (x) عندما $[f(x) = y = 0]$

$$(x - x_2)(y_2 - y_1) = -y_2 (x_2 - x_1)$$

$$x - x_2 = \frac{-y_2 (x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$$

الجديدة $x_3 = x_2 - \dfrac{y_2 (x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}} \quad , [i = 2, 3, \ldots]$$



يجب أن تكون الإشارة $f(a)$ ، $f(b)$ مختلفة $[a, b]$

الجذر يجب أن يقع داخل الفترة

- فاذا كانت $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$

فأن الجذر يقع في الفترة $[x_1, x_3]$

- والا اذا كانت $f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$

فأن الجذر يقع في الفترة $[x_2, x_3]$

نكرر العملية حتى يتحقق أحد الشرطين

$$|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$$

$$|f(x_{i+1})| < \epsilon$$

حيث (ϵ) مقدار صغير جداً

مثال/ ① جد جذر المعادلة غير الخطية $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$

في الفترة $[0, 1]$ مع مقياس توقف $[\epsilon = 0.1]$ بطريقة الموقع الوهمي:

الحل/ $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $f(x_1) = f(0) = 1$ ، $f(x_2) = f(1) = -1$

التكرار الأول:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\,(x_2 - x_1)}{(f(x_2) - f(x_1))} = 1 - \frac{(-1)(1-0)}{(-1-1)} = \boxed{0.5}$$

$$y_3 = f(x_3) = (0.5)^3 - (0.5)^2 - 2(0.5) + 1 = -0.125$$

∴ أن الجذر يقع في الفترة $[0, 0.5]$

$$|0.5 - 0| = 0.5 > \epsilon$$

∴ نستمر

$f(x_4) = 0.0878 - 0.1976 - 0.889 + 1$ ⊛

التكرار الثاني: $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = -0.125$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{[f(x_3) - f(x_2)]} = 0.5 - \frac{(-0.125)(0.5-0)}{(-0.125-1)}$$

$$x_4 = 0.4445$$

$$y_4 = f(x_4) = (0.4445)^3 - (0.4445)^2 - 2(0.4445) + 1 = 0.0013$$ ⊛

أذن الجذر يقع في الفترة $[0.4445, 0.5]$

$|0.5 - 0.4445| = 0.0555 < \epsilon$:

نتوقف والجذر هو $[0.4445, 0.5]$ أو $x_4 = 0.4445$

مثال ②: جد جذر المعادلة غير الخطية $f(x) = x \ln x - 1$
باستخدام طريقة الموقع الوهمي مع الفترة $[1, 2]$ ومقياس توقف :
$|f(x)| < 0.01$

(واجب)

قيم الحل : $x_3 = 1.7213$
$x_4 = 1.7614$

* كل دالة مهما كانت صيغتها الى متعددة حدود بأستخدام متسلسلة تايلر .
وكل دالة مهما كانت صيغتها يمكن تحويلها الى دوال مثلثية بأستخدام سلسلة فورير .

خواص طريقة الموقع الوهمي :

1- طريقة الموقع الوهمي أسرع من طريقة تنصيف الفترات في الوصول الى الجذر .

2- معدل التقارب في هذه الطريقة هو فوق الخطي .

3- هذه الطريقة لا تستطيع أيجاد الجذور العقدية لمتعددات الحدود .

4- في بعض الاحيان قد نحتاج الى أستخدام $|f(x)| < \epsilon$ كمقياس توقف لهذه الطريقة .

3- طريقة نيوتن - رافسون : [Newton - Raphson method]

تعتبر طريقة (نيوتن - رافسون) أحدى أهم طرق حل المعادلات غير الخطية والتي تعتمد على (سلسلة تايلر) وصيغتها هي :

$$f(X_{i+1}) = f(X_i) + f'(X_i)(X_{i+1} - X_i) + \frac{f''(X_i)}{2!}(X_{i+1} - X_i)^2 + \cdots$$

بأهمال الحدود من المشتقة الثانية فما فوق نحصل على :

$$f(X_{i+1}) = f(X_i) + f'(X_i)(X_{i+1} - X_i)$$

بما أن الحل هو أيجاد قيمة (X) بحيث $[f(X_{i+1}) = 0]$

$$0 = f(X_i) + f'(X_i)(X_{i+1} - X_i)$$

$$\boxed{X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)}} \quad , i = 0, 1, 2, \ldots$$

(حفظ)

$$= 0.5 - \frac{0.8776 - 1}{-0.4794 - 2}$$

مع مقياس التوقف $|X_{i+1} - X_i| < \epsilon$

أو

$$|f(X_{i+1})| < \epsilon$$

مثال/ جد جذر المعادلة غير الخطية $f(x) = \cos x - 2x$
باستخدام طريقة (نيوتن - رافسون) مع القيمة الابتدائية $[X_0 = 0.5]$
جد تكرارين فقط

الحل/

التكرار الأول: $X_0 = 0.5$, $f(x) = \cos x - 2x$, $f'(x) = -\sin x - 2$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} \Rightarrow X_1 = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 2(0.5)}{-\sin(0.5) - 2} = 0.4506$$

التكرار الثاني: $X_1 = 0.4506$, $f(x) = \cos x - 2x$, $f'(x) = -\sin x - 2$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} \Rightarrow X_2 = 0.4506 - \frac{\cos(0.4506) - 2(0.4506)}{-\sin(0.4506) - 2}$$

$$\therefore X_2 = 0.4502$$

خواص طريقة (نيوتن - رافسون):

1- طريقة (نيوتن - رافسون) أسرع من طريقة تنصيف الفترات، طريقة الموقع الوضعي للوصول الى الجذر.

2- معدل التقارب هو تربيعي.

3- طريقة (نيوتن - رافسون) لا تعتمد على أشارة الدالة $f(x)$.

4- طريقة (نيوتن - رافسون) تستطيع أيجاد الجذور العقدية لمتعددات الحدود.

5- $f'(x)$ يجب أن لا تكون قريبة من الصفر.

مثال②/ جد جذر المعادلة غير الخطية $f(x) = x^2 - 4\sin x$ بطريقة نيوتن - رافسون مع القيمة الأبتدائية $x_0 = 3$ ومقياس توقف $\epsilon = 0.05$

الحل/ التكرار الأول:

$x_0 = 3 \;,\; f'(x) = 2x - 4\cos x$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{(3)^2 - 4\sin(3)}{2(3) - 4\cos(3)} = \boxed{2.1531}$$

$$|x_1 - x_0| = |2.1531 - 3| = 0.8469 > \epsilon$$

نستمر

Yousef Aeham

التكرار الثاني:

$x_1 = 2.1531$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 2.1531 - \frac{(2.1531)^2 - 4\sin(2.1531)}{2(2.1531) - 4\cos(2.1531)} = 1.9541$$

$$\therefore |x_2 - x_1| = |1.9541 - 2.1531| = |-0.199| = 0.199 > \epsilon$$

نستمر

(واجب) $(x_3 = 1.934)$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= 1.9541 - \frac{(1.9541)^2 - 4\sin(1.9541)}{2(1.9541) - 4\cos(1.9541)}$$

$$= 1.9541 - \frac{3.8185 - 3.7097}{3.9082 + 1.4959}$$

$$= 1.9541 - \frac{0.1088}{5.4041}$$

$$= 1.9541 - 0.02013$$

$$x_3 = 1.93397$$

$$|x_3 - x_2| = |1.93397 - 1.9541| = |-0.02013|$$

$$= 0.02013 < \epsilon$$

نتوقف

الحالات الخاصة لطريقة نيوتن - رافسون :

أ. ايجاد معكوس (مقلوب) أي عدد :

يمكن لطريقة نيوتن - رافسون ايجاد معكوس أي عدد بالصيغة الآتية :

لتكن (D) أي عدد حقيقي . نفرض أن :

$$\frac{1}{D}=x \Rightarrow \frac{1}{x}=D \Rightarrow \frac{1}{x}-D=0$$

نفرض أن :

$$f(x)=\frac{1}{x}-D$$

$$f(x)=0$$

بتطبيق صيغة نيوتن نحصل على :

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad , [i=0,1,2,\ldots]$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{\frac{1}{x_i}-D}{\frac{-1}{x_i^2}} \quad , [i=0,1,2,\ldots]$$

بعد التبسيط نحصل على :

$$\boxed{x_{i+1}=2x_i-Dx_i^2} \quad , [i=0,1,2,\ldots] \quad (\text{حفظ})$$

Yousef Aeham

* للتحقق من الحل نقوم بتقسيم $\frac{1}{D} = \frac{1}{2.5} = 0.4$ قيمة تقريبية من قيمة $(X_1 = 0.375)$
∴ نستمر

مثال/ جد معكوس العدد $[D = 2.5]$ بأستخدام طريقة نيوتن مع القيمة الابتدائية $[X_0 = 0.5]$ ومقياس توقف $[\epsilon = 0.005]$

الحل/

التكرار الأول: $X_0 = 0.5 \quad , \quad D = 2.5$

$X_1 = 2X_0 - DX_0^2$

$= 2(0.5) - (2.5)(0.5)^2 = \boxed{0.375}$

$|X_1 - X_0| = |0.375 - 0.5| = 0.125 > \epsilon$ نستمر

التكرار الثاني: $X_1 = 0.375 \quad , \quad D = 2.5$

$X_2 = 2X_1 - DX_1^2 = 2(0.375) - (2.5)(0.375)^2 = \boxed{0.3984}$

$|X_2 - X_1| = |0.3984 - 0.375| = 0.0234 > \epsilon$ نستمر

التكرار الثالث: $X_2 = 0.3984 \quad , \quad D = 2.5$

$X_3 = 2X_2 - DX_2^2$

$X_3 = 2(0.3984) - (2.5)(0.3984)^2 = 0.4$

$|0.4 - 0.3984| = 0.0016 < \epsilon$

نتوقف والجذر هو $\boxed{X = 0.4}$

* إيجاد الجذر (n) لأي عدد :

لتكن A عدد حقيقي موجب

لإيجاد الجذر (n) للعدد (A) نفرض أن :

$$\sqrt[n]{A} = X$$

$$A = X^n$$

$$X^n - A = 0$$

نفرض أن :

$$f(X) = X^n - A \quad , \quad f'(X) = n X^{n-1}$$

بتطبيق صيغة نيوتن ، نحصل على :

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)} \quad ; [i = 0, 1, 2, \ldots]$$

$$\boxed{X_{i+1} = X_i - \frac{X_i^n - A}{n X_i^{n-1}}} \quad ; [i = 0, 1, 2, \ldots]$$

بعد التبسيط ، نحصل على :

$$X_{i+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1) X_i + \frac{A}{X_i^{n-1}}\right] \quad ; [i = 0, 1, 2, \ldots]$$

مثال/ جد قيمة $\sqrt[3]{20}$ بأستخدام صيغة نيوتن مع القيمة الابتدائية $[X_0=3]$ ومقياس التوقف $[\epsilon=0.001]$ (أعتماد الخطأ النسبي)

الحل/

التكرار الأول: $X_0=3 \quad , A=20 \quad , n=3$

$$X_1=\frac{1}{n}\left[(n-1)X_0+\frac{A}{X_0^{n-1}}\right]$$

$$X_1=\frac{1}{3}\left[2(3)+\frac{20}{3^2}\right]=\boxed{2.7410}$$

(الخطأ النسبي) $\left|\frac{X_1-\overset{\text{السابقة}}{X_0}}{\underset{\text{الجديدة}}{X_1}}\right| = \left|\frac{2.7410-3}{2.741}\right| = 0.0945 > \epsilon$

نستمر

التكرار الثاني: $X_1=2.741 \quad , A=20 \quad , n=3$

$$X_2=\frac{1}{n}\left[(n-1)X_1+\frac{A}{X_1^{n-1}}\right]$$

$$X_2=\frac{1}{3}\left[2(2.741)+\frac{20}{(2.741)^2}\right]=2.715$$

$$\left|\frac{2.715-2.741}{2.715}\right| = 0.0096 > \epsilon$$

نستمر

التكرار الثالث: (واجبها) $X_2 = 2.715, n = 3, A = 20$

$$X_3 = \frac{1}{n}\left[(n-1)X_2 + \frac{A}{X_2^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2(2.715) + \frac{20}{(2.715)^2}\right] = (0.3333)\left[5.43 + 2.7132\right]$$

$$= 2.7141$$

$$\left|\frac{2.7141 - 2.715}{2.7141}\right| = \left|\underbrace{-0.0003316}_{-3.3160\times10^{-4}}\right| = 0.0003316 < \epsilon$$

نتوقف

4- طريقة القاطع: (Secant method)

في طريقة (نيوتن - رافسون) نحتاج الى أيجاد مشتقة الدالة $f(x)$ والتي تعتبر واحدة من مساوئ طريقة نيوتن لتجاوز هذه الخطوة نفرض أن:

$$\left[f'(X_i) = \frac{f(X_i) - f(X_{i-1})}{X_i - X_{i-1}}\right] \quad \text{——} \quad (1)$$

بتعويض المعادلة (1) في صيغة نيوتن نحصل على:

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$$

$$= X_i - \frac{f(X_i)}{\frac{f(X_i) - f(X_{i-1})}{X_i - X_{i-1}}}$$

بعد التبسيط:

$$\boxed{X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)(X_i - X_{i-1})}{f(X_i) - f(X_{i-1})}}, \quad [i = 1, 2, 3, \text{——}]$$

الصيغة اعلاه تمثل صيغة طريقة القاطع وتحتاج الى قيمتين أبتدائيتين بغض النظر عن أختلاف الأشارة لقيمة الدالة $f(x)$ للقيم الابتدائية

مثال①: جد جذر المعادلة $f(x)=e^x-3x$ بطريقة القاطع بأستخدام القيمة الأبتدائية $(x_0=0.3)$ ، $(x_1=0.5)$ جد تكرارين فقط.

الحل/

التكرار الأول:

$x_0=0.3 \quad , \quad x_1=0.5$

$f(x_0)=e^{0.3}-3(0.3)=0.4499$

$f(x_1)=e^{0.5}-3(0.5)=0.1487$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$x_2=0.5-\frac{0.1487(0.5-0.3)}{(0.1487-0.4499)}=\boxed{0.5986}$$

لاحظ قيمة الجذر خارج الفترة

التكرار الثاني:

$x_1=0.5 \quad , \quad x_2=0.5986$

$f(x_1)=0.1487 \ , \ f(x_2)=e^{0.5986}-3(0.5986)=0.0238$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(x_2-x_1)}{(f(x_2)-f(x_1))}=0.5986-\frac{0.0238(0.5986-0.5)}{(0.0238-0.1487)}$$

الجذر هو $x_3=0.617$

مثال (2): جد جذر المعادلة اذا كان $[f(x)=3x-\cos x-1]$
بطريقة القاطع مستخدماً القيم الابتدائية $(x_1=1)$, $(x_0=0)$
مع مقياس توقف $(\epsilon=0.005)$

الحل:

التكرار الأول: $x_0=0 \quad , \quad x_1=1$

$$f(x_0)=3(0)-\cos(0)-1=-2$$

$$f(x_1)=3(1)-\cos(1)-1=1.4597$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$x_2=1-\frac{1.4597(1-0)}{1.4597+2}=0.5781$$

$$|x_2-x_1|=|0.5781-1|=|-0.4219|=0.4219>\epsilon$$

نستمر

التكرار الثاني: $x_1=1 \quad , \quad x_2=0.5781$

$f(x_1)=1.4596 \quad , \quad f(x_2)=-0.1032$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

$$=0.5781+\frac{(-0.1032)(-0.4219)}{1.5628}=0.5781+\frac{0.0435}{1.5628}$$

$$x_3=0.5781+0.0278=0.6059$$

$$|x_3-x_2|=|0.6059-0.5781|=0.0278>\epsilon$$

نستمر

خواص طريقة القاطع:

1- طريقة القاطع اسرع من طريقة تنصيف الفترات في الوصول الى الجذر.

2- طريقة القاطع ابطأ من طريقة نيوتن في الوصول الى الجذر.

3- هذه الطريقة لا تحتاج الى أيجاد مشتقة الدالة $f(x)$.

4- هذه الطريقة لا تعتمد على تغيير اشارة الدالة $f(x)$.

٤- طريقة النقطة الصامدة: (Fixed Point method)

لتكن $f(x)$ معادلة غير خطية

$$f(x) = 0 \quad \text{———} \quad (1)$$

عند أستخدام طريقة النقطة الصامدة نتبع الخطوات الآتية:

1- نعيد كتابة المعادلة (1) بالصيغة: $[x = g(x)]$ ——— (2)

2- نختار قيمة أبتدائية قريبة من جذر المعادلة $g(x)$.

3- تكرار العلاقة: $[x_{i+1} = g(x_{i+1})]$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$
الى أن نصل الى الجذر المطلوب

مثال/ جد جذر المعادلة : $[f(x) = x^2 - x - 3]$ في الفترة $[2,3]$
بأستخدام القيمة الابتدائية $(x_0 = 2.5)$

الحل/

(الحل الاول)

$f(x) = x^2 - x - 3 = 0$

$\boxed{x = x^2 - 3}$

التكرار الاول/ $x_0 = 2.5 \quad , x_1 = x_0^2 - 3$

$x_1 = (2.5)^2 - 3 = 3.25$

$x_2 = (3.25)^2 - 3 = \boxed{7.5625}$

متباعدة خارج الفترة

(الحل الثاني)

$x^2 - x - 3 = 0$

$x^2 = x + 3$

$\boxed{x = 1 + \frac{3}{x}}$

التكرار الأول: $x_0 = 2.5 \quad , x_1 = 1 + \frac{3}{2.5} = 2.2$

التكرار الثاني:

$x_1 = 2.2$

$x_2 = 1 + \frac{3}{2.2} = \boxed{2.3636}$

$\vdots$

تقترب من الجذر

$|x_2 - x_1| = |2.3636 - 2.2|$
$= 0.1636 < \epsilon$

(الحل الثالث) $x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{x+3}$

$\therefore x = (x+3)^{1/2}$

$g'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}$

$|g'(2)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2+3}}\right| < 1 \quad = 0.2236 < 1$

$|g'(3)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{3+3}}\right| < 1 \quad = 0.2041 < 1$

$x_1 = (x_0 + 3)^{1/2} = 4.58113883 \quad (27)$

$x_2 = (x_1 + 3)^{1/2}$

$x_2 = 5.1403$

نظرية:

لتكن $[f(x)=0]$ معادلة غير خطية معرفة في الفترة $[a,b]$ ولتكن (L) عدد موجب أصغر من الواحد عندئذ الشرط الكافي لتقارب الصيغة التكرارية:

$$X_{i+1}=g(X_i) \quad ,(i=0,1,2,\ldots)$$

هو

$$|g'(x)|\leqslant L<1$$

لكل الفترة $[a,b]$

مثال① (السؤال السابق)

1_ المعادلة $f(x)=x^2-x-3$, $[2,3]$, $X_0=2.5$

$$x=x^2-3$$

نلاحظ أن $g'(x)=2x$

نعوض قيم $x=2$, $x=3$

$$|g'(2)|=|2(2)|=4>1$$

∴ المعادلة $x=x^2-3$ (متباعدة)

2_ المعادلة $f(x)=x^2-x-3$, $[2,3]$

$$x=1+\frac{3}{x}$$

نلاحظ أن $g'(x)=\frac{-3}{x^2}$

نعوض عن قيم $(x=2)$, $(x=3)$

$$\left|\frac{-3}{2^2}\right|=0.75<1$$

$$\left|\frac{-3}{3^2}\right|=\frac{1}{3}<1$$

(متقاربة)

$X_1=1+\frac{3}{X_0}=2.2$; $X_2=1+\frac{3}{X_1}=2.3636$

مثال② جد جذر المعادلة: $[f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0]$ في الفترة $[0,1]$
بطريقة النقطة الصامدة

الحل

$$x^3 - 7x + 2 = 0$$

$$7x = x^3 + 2 \Rightarrow x = \frac{x^3+2}{7}$$

$$g'(x) = \frac{1}{7}(3x^2)$$

$$|g'(0)| = 0 < 1$$

$$|g'(1)| = \frac{3}{7} < 1 \qquad (\text{تحقق})$$

أذن المعادلة تصبح

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad , (i = 0, 1, 2, \text{---})$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i^3 + 3}{7}$$

نختار أي قيمة أبتدائية في الفترة $[0,1]$ ولتكن $(x_0 = 1)$

$$x_1 = \frac{1}{7}(x_0^3 + 2) = \frac{1}{7}(1+2) = \boxed{0.4286}$$

$$x_2 = \frac{1}{7}((0.4286)^3 + 2) = \boxed{0.2970}$$

Yousef Aeham

* تمكن صيغة نيوتن من التخلص من تطبيق الشرط لمعرفة متباعدة او متقاربة لانها دائماً ستكون متقاربة ويمكن اعتمادها في الحل .

تكملة مثال (ص 27) :

(الحل الرابع) :

$$f(x) = x^2 - x - 3$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$ (دائماً متقاربة)

$$x = x - \frac{x^2 - x - 3}{2x - 1}$$

$$x = \frac{2x^2 \cancel{- x} - x^2 \cancel{+ x} + 3}{2x - 1}$$

$$g(x) = x = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$g'(x) = \frac{(2x-1)(2x) - (x^2+3)2}{(2x-1)^2}$$

$$|g'(2)| = \left|\frac{3(4) - 14}{(3)^2}\right| = \left|\frac{-2}{9}\right| < 1$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 3}{2x_0 - 1} = 5.25$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 3}{2x_1 - 1} = \frac{30.5625}{9.5} = 3.2171$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 3}{2x_2 - 1} = \frac{13.3497}{5.4342} = 2.4566$$

خواص طريقة النقطة الصامدة :

① معدل التقارب لطريقة النقطة الصامدة هو خطي .

② يجب أن يتحقق الشرط : $\left[\, 1 \leqslant L \leqslant |g'(x)| \,\right]$ لضمان تقارب الحل .

③ اذا كانت الدالة مستمرة وتملك اكثر من جذر قد نفقد أحد الجذور عند أستخدام هذه الطريقة .

طريقة نيوتن - رافسون لحل أنظمة المعادلات غير الخطية :

يمكن أيجاد الجذور الحقيقية لمنظومة من المعادلات غير الخطية بأكثر من متغير والتي صيغتها :

$$f(x,y)=0$$
$$g(x,y)=0 \qquad (1)$$

بطريقة نيوتن - رافسون بأستخدام الخطوات الآتية :

١- نفرض أن الحل التقريبي (الأبتدائي) للنظام (1) هو (x_0, y_0)

٢- نحسب قيم المعادلات (f), (g) عند القيمة الأبتدائية

$$f(x_0, y_0)$$
$$g(x_0, y_0) \qquad (2)$$

٣- نجد مصفوفة جاكوبي للنظام (1) وصيغتها :

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

محددة

٤- نحسب قيم $(h), (K)$ بالشكل الآتي:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$K = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{|J|}$$

٥- نجد قيم $(X_1), (Y_1)$ الجديدة بأستخدام الصيغ

$$X_1 = X_0 + h$$
$$Y_1 = Y_0 + K \qquad (3)$$

٦- اذا كانت

$$\min\{|X_1 - X_0|, |Y_1 - Y_0|\} < \epsilon$$

نتوقف والا نكرر الخطوات السابقة.

مثال ① جد الحل للنظام غير الخطي الآتي:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$g(x,y) = x^2 - y^2 + 7 = 0$$

باستخدام طريقة نيوتن - رافسون مع القيمة الابتدائية $(2.5, 3.5)$
ومقياس توقف $(\epsilon = 0.05)$

الحل/

$$f(x_0, y_0) = (2.5)^2 + (3.5)^2 - 25 = -6.5$$
$$g(x_0, y_0) = (2.5)^2 - (3.5)^2 + 7 = 1$$
$$f_x(x_0, y_0) = 2x = 2(2.5) = 5$$
$$g_x(x_0, y_0) = 2x = 2(2.5) = 5$$
$$f_y(x_0, y_0) = 2y = 2(3.5) = 7$$
$$g_y(x_0, y_0) = -2y = -2(3.5) = -7$$

$$|J| = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -35 - 35 = -70 \neq 0$$

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} -6.5 & 7 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}}{-70} = \frac{-45.5 + 7}{-70} = \frac{-38.5}{-70} = 0.55$$

$$K = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6.5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-70} = \frac{-37.5}{-70} = 0.5357$$

$$x_1 = x_0 + h = 2.5 + 0.55 = 3.05$$
$$y_1 = y_0 + K = 3.5 + 0.5357 = 4.0357$$

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e = 1} = \ln x \quad , \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$\min\{|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|\}$

$\min\{|3.05 - 2.5|, |4.0357 - 3.5|\} > \epsilon$

$\min\{0.55, 0.5357\} > \epsilon$

نستمر

$(3.05, 4.0357)$ (التكملة واجب)

$x_2 = 3.0004$

$y_2 = 4.0001$

مثال ② / جد جذور النظام غير الخطي

$f(x,y) = x + 3\log_{10} x - y^2$

$g(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1$

بطريقة نيوتن - رافسون مع القيمة الابتدائية $(3.5, 2.5)$

جد تكرارين

الحل /

$f(x_0, y_0) = 3.5 + 3\dfrac{\ln 3.5}{\ln 10} - (2.5)^2 = -1.1178$

$g(x_0, y_0) = 2(3.5)^2 - (3.5)(2.5) - 5(3.5) + 1 = -0.75$

$f_x(x_0, y_0) = 1 + 3 \cdot \dfrac{1}{\ln 10 \cdot x} = 1 + 3 \cdot \dfrac{1}{\ln 10 (3.5)} = 1.3723$

$f_y(x_0, y_0) = -2y = -2(2.5) = -5$

$g_x = 4x - y - 5 = 4(3.5) - 2.5 - 5 = 6.5$

$g_y = -x = -3.5$

$$|J| = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.3723 & -5 \\ 6.5 & -3.5 \end{vmatrix} = 27.6969 \neq 0$$

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1.1178 & -5 \\ 0.75 & -3.5 \end{vmatrix}}{27.6969} = -0.0059$$

$$K = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1.3723 & 1.1178 \\ 6.5 & 0.75 \end{vmatrix}}{27.6969} = -0.2252$$

$X_1 = X_0 + h = 3.5 - 0.0059 = 3.4941$

$Y_1 = Y_0 + K = 2.5 - 0.2252 = 2.2748$

$\therefore (3.4941, 2.2748)$ التكرار الثاني:

$X_2 = 3.4875$

$Y_2 = 2.2748$