— University of Mosul —
College of Petroleum & Mining Engineering

# Functions of two or more Variables

## Lecture No.5

**Asst.Lect. Zaid Salahaldeen Thanoon**

**Petroleum and Refining Engineering Department**

**Email**: zeadsalahaldeen@uomosul.edu.iq

LECTURE CONTENTS:

- Lagrange Multipliers.
- Examples.

suppose that f(x,y,z) and g(x,y,z) and their first partial derivatives are continous. to find the local maximum and local minimum values of (f) subjected to the constraind condition g(x,y,z) = 0, to find the values of x,y,z and λ that satisfy the following expressions:

ملاحظة (مهمة): هذه الطريقة هي لايجاد القيم العظمى (max) والصغرى (min) والتي تكون فيها المسألة مشروطة او مقيدة بمعادلة.

م: وفي هذه المسألة تكون هنالك معادلة أساسية والتي تحت لها القيم العظمى والصغرى ومعادلة ثانية مساعدة أو شرطية.

λ: تستخدم كعامل مساعد لايجاد قيم (max, min)(extreme values) وغير مهم ايجاد قيمتها.

في هذه المسائل هناك ثلاثة نقاط (critical point) مطلوب
إيجادها (x,y,z) بالإضافة الى قيمة (λ)، اصبح عدد المجاهيل
المطلوب إيجادها هي أربعة، لهذا نحتاج الى أربعة معادلات لإيجاد
هذه القيم وهي كالاتي:

$$fx = \lambda \cdot gx \quad \text{---} (1)$$

$$fy = \lambda \cdot gy \quad \text{---} (2)$$

$$fz = \lambda \cdot gz \quad \text{---} (3)$$

$$g(x,y,z) = 0 \quad \text{---} (4)$$

Ex: Find extreme values of $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ on the circle $x^2 + y^2 = 1$.

solution:

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ , $g(x,y) = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$f_x = \lambda \cdot g_x \rightarrow 2x = \lambda \cdot 2x$ ——— (1)

$f_y = \lambda \cdot g_y \rightarrow 4y = \lambda \cdot 2y$ ——— (2)

!! المطلوب هو ايجاد قيم (x) و (y) ولس (λ) ولايجاد هذه القيم نقوم بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) وهي افضل طريقة.

$$\frac{2x}{4y} = \frac{x \cdot 2x}{x \cdot 2y} \rightarrow \frac{x}{2y} = \frac{x}{y} \rightarrow x \cdot y = 2xy$$

$2xy - xy = 0 \rightarrow x \cdot y = 0$ , $x = 0$ or $y = 0$

نعوض قيمة (x) في المعادلة الأصلية لإيجاد قيمة (y)

$x^2+y^2=1 \rightarrow (0)^2+y^2=1 \rightarrow y^2-1=0$

$(y-1)(y+1)=0$ ، $y-1=0 \rightarrow \boxed{y=1}$

or $(y+1)=0 \rightarrow \boxed{y=-1}$

$x=0$

$y=1$ $y=-1$

نعوض قيمة (y) لإيجاد قيمة (x) :

$x^2+y^2=1 \rightarrow x^2+(0)^2=1 \rightarrow x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$ ، $x-1=0 \rightarrow x=1$

or $(x+1)=0 \rightarrow x=-1$

$y=0$

$x=1$ $x=-1$

إذا أصبح لدينا أربعة نقاط حرجة :

$(0,1)(0,-1)(1,0)(-1,0)$

نقوم بعدها بتعويض هذا النقاط في المعادلة الاصلية $f(x,y)$ لإيجاد القيم العظمى (max) والصغرى (min) .

يتم إكمال الحل بنفس الطريقة السابقة

Ex: Find the dimensions of the box with volume $1000\ cm^3$ that has minimum surface Area.

solution:

في هذا السؤال الشرط هو الحجم وهو($1000cm^3$)، اما المعادلة الاصلية فيه الـ Surface Area لانها مرتبطة بـ (min).

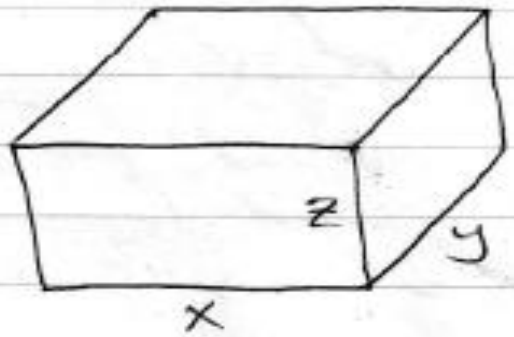
م: في صيغ المسائل التي تطلب ضمنا ايجاد (min) و(max) هي المعادلة الاصلية وليست الشرطية.

$Volume = x.y.z = 1000$

هذه معادلة شرطية بعتبر (g)

$g(x,y,z) = 0$

$x.y.z - 1000 = 0$



$g(x,y,z) = x.y.z - 1000$ ——— (4)

اما معادلة (1) و (2) و (3) هي معادلات (Lagrange) ($\lambda$).

لتكوين المعادلة الاصلية $f(x,y,z)$ والتي هي المساحة المطلوبة لـ (Box) وتساوي:

$f(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$ ← المساحة الطلب للصندوق

ملحوظة:
ممكن أن تأتي مسألة ويطلب (Box) مفتوح من إحدى الجهات.

$f_x = \lambda . g_x \rightarrow 2y + 2z = \lambda(yz)$ ——— (1)

$f_y = \lambda . g_y \rightarrow 2x + 2z = \lambda(x.z)$ ——— (2)

$f_z = \lambda . g_z \rightarrow 2x + 2y = \lambda(x.y)$ ——— (3)

أصبح لدينا أربعة مجاهيل (x، y، z، λ) وأربعة معادلات والمطلوب هو إيجاد قيم (x، y، z).

نقوم بقسمة المعادلة الأولى ① على المعادلة الثانية ② .
وبعدها نقسم المعادلة الأولى ① على المعادلة الثالثة ③ .

$$\frac{eq.1}{eq.2} \Rightarrow \frac{2y+2z}{2x+2z} = \frac{xyz}{xxz}$$

$$2xy+2xz = 2xy+2yz \longrightarrow \boxed{y = x}$$

$$\frac{eq.1}{eq.3} \quad \frac{2y+2z}{2x+2y} = \frac{x.yz}{x.xy} \longrightarrow 2xy+2xz = 2xz+2yz$$

$$\boxed{z = x}$$

نعوض في المعادلة رقم (4) وهي معادلة (g)

$$x.y.z = 1000$$

$$x^3 = 1000 \rightarrow x = 10 \quad , y = 10 , \; z = 10$$

∴ هذه الابعاد هي التي سوف تعطي اقل مساحة سطحية.

ب: في بعض المسائل تكون أكثر من نتيجة لـ (x, y, z) عليه نقوم بتعويضها في معادلة (Surface Area) لايجاد أقل مساحة سطحية.
أو التي تعطي أقل مساحة سطحية.