— University of Mosul —
College of Petroleum & Mining Engineering

The Cross Product

Lecture No.3

Asst.Lect. Zaid Salahaldeen Thanoon

Petroleum and Refining Engineering Department

Email: zeadsalahaldeen@uomosul.edu.iq

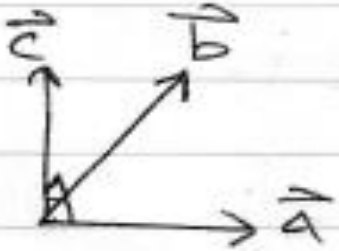
LECTURE CONTENTS:

- Introduction to Cross product.
- Properties of Cross product.
- Calculating the cross product as determinate.
- Applications of cross product.
- Examples.

يسمى أيضاً بـ (vector product) لأن الناتج الثالث لحاصل الضرب هو تكوين متجه جديد ويكون عمودي على المتجهين اللذين تم ضربهما.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

↖ vector



- The cross product $(U \times V)$ is the vector:

$$U \times V = (\|U\|\|V\| . \sin\theta)$$ ← unit vector ⊥ to plane.

- for nonzero vectors (U) and (V) are parallel if and only if $U \times V = 0$.

ملاحظة: حاصل ضرب متجهين عموديين او غير عموديين يعطي متجه عمودي عليهما.

- properties of the cross product :

if (u, v and w) are any vectors and (r, s) are scalars then :

1- $(ru) \times (sv) = (rs)(u \times v)$

2- $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

3- $v \times u = -(u \times v)$ ← مهمة

4- $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$

5- $0 \times u = 0$

6- $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ ← مهمة

7 $u \times v = 0$, $u \parallel v$ ← مهمة

وهذه الخاصة تستخدم في حالة طلب إثبات أن (u) موازي لـ (v).

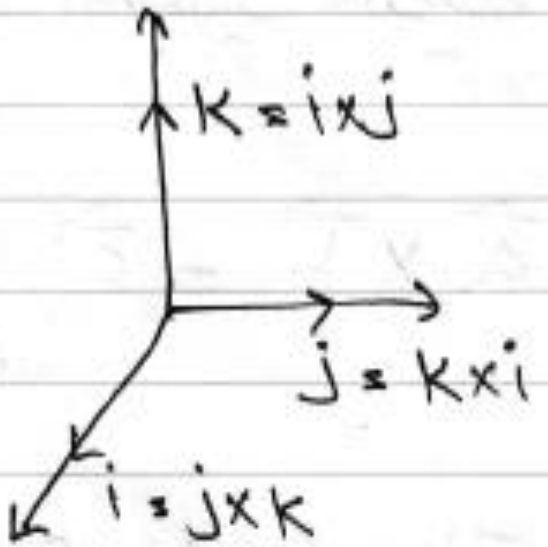
according to note.1 :

$i \times j = -(j \times i) = k$

$j \times k = -(k \times j) = i$

$k \times i = -(i \times k) = j$

$i \times i = j \times j = k \times k = 0.0$



- Calculating the cross product as a Determinant:

if $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ and $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ then:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) i - (u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$

Ex: if $\vec{a} = 2i - 3k$, $\vec{b} = -i + 2j + 5k$, find $a \times b$.

solution: $\vec{a} = (2, 0, -3)$ - $\vec{b} = (-1, 2, 5)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (0*5 - 2*(-3)) i - (2*5 - (-3*-1)) j + (2*2 - 0*(-1)) k$$

$$= (0+6) i - (10-3) j + (4-0) k$$

$$\rightarrow a \times b = 6i - 7j + 4k$$

ناتج حاصل ضرب المتجهين ($\vec{a} \times \vec{b}$) هو متجه جديد عمودي على المتجهين
اي ان الزاوية (θ) = ٩٠، ومن هنا نستنتج اذا تم عمل (Dot product)
بين المتجه الجديد وأحد المتجهين فإن الناتج سيكون صفر.

Ex: if the $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$, find the:
1- $\vec{u} \times \vec{v}$, 2- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

solution:

$$1- \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2*1-(-2)*0)i - (1*1-(-2)*3)j + (1*0-2*3)k$$

$$= 2i - 7j - 6k$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (2, -7, -6)$$

$$2- \vec{u} \overset{\text{Dot}}{\cdot} (\vec{u} \overset{\text{cross}}{\times} \vec{v}) = (1, 2, -2) \cdot (2, -7, -6) = (1*2) + (2*-7) + (-2*-6)$$

$$= 2 - 14 + 12 = 0.0$$ وهذه النتيجة تثبت القاعدة المذكورة في الملاحظة السابقة.

ملاحظة: عند إجراء عملية الضرب فتكون الأولوية للأقواس أولاً، أما إذا لم توجد أقواس فتكون الأولوية لـ (cross product) يعني لـ (X) وبعدها يأتي الـ (Dot product) (.).

Ex: find a unit vector orthogonal to both vector $\vec{a}=(3,2,1)$ and $\vec{b}=(-1,-1,0)$.

solution: المتجه الذي يكون عمودياً على المتجهين هو الناتج من حاصل ضرب (cross product) للمتجهين.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} k$$

$$=(2*0-1*(-1))i-(3*0-1*(-1))j+(3*(-1)-2*(-1))k$$

$$\Rightarrow \vec{c}=-i-j+5k$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(5)^2}=\sqrt{27}$$

$$\Rightarrow \text{unit vector}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{-i-j+5k}{\sqrt{27}}$$

Applications of cross product :

هنالك أربعة تطبيقات أساسية على (cross product) :

1- Area of triangle : مساحة المثلث

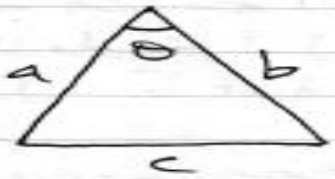
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\theta$$

قانون cross product

$$= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \leftarrow \text{length}$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{c}|$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c}|$$



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ * القاعدة * الارتفاع

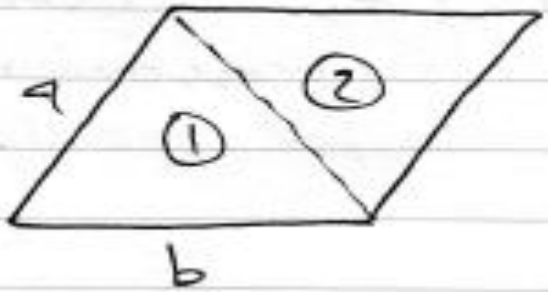
هذا القانون يستخدم في المثلث القائم الزاوية.

2- Area of parallelogram مساحة متوازي الأضلاع

وهو عبارة عن مثلثين

$$A = 2 * \left(\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|\right)$$

$$\therefore A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



(كل ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين)

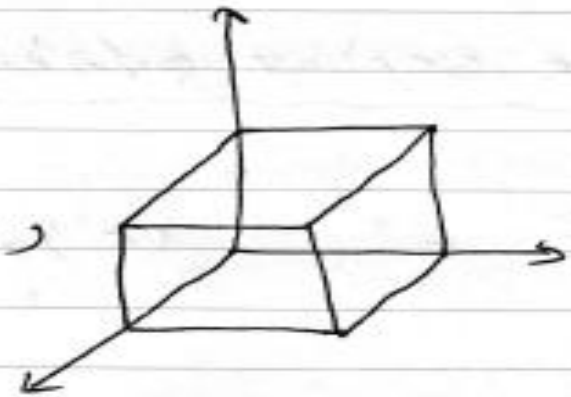
3- volume of parallel piped (box) : متوازي الاوجه

هو شكل يشبه المكعب ولكن زواياه غير قائمة .

$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

dot ↑ cross ↑

(كل وجهين متقابلين يكونو متوازيين)



4- Torque : when we turn a bolt by applying a force (F) to a wrench :

magnitude of torque = $|r||F| \cdot \sin\theta$

vector